M5 : Particules chargées dans un champ EM

Données : $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C, masse d'un nucléon $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg, masse de l'électron $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg.

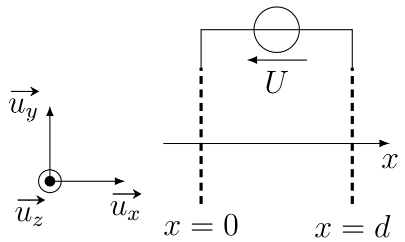
Exercice 1 : Ordres de grandeur

On considère un électron se déplaçant dans une bobine à $v = 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ perpendiculairement au champ magnétique de norme $B = 0{,}1$ T.

1. Rappeler l'expression de la force de Lorentz.
2. Déterminer la valeur de la norme de la force magnétique.
3. Quel champ électrique devrait-on imposer pour avoir une force électrique du même ordre ?
4. Déterminer l'ordre de grandeur du rapport de la force magnétique et du poids de l'électron.

Exercice 2 : Exercices de cours

1. **Proton accéléré par une différence de potentiel.** Deux électrodes plans sont soumis à une différence de potentiel $U = 1{,}0$ kV > 0.



   (a) Orienter le champ électrique.
   (b) On place un proton en $x = 0$ sans vitesse initiale. Déterminer sa vitesse v_f et son énergie cinétique en $x = d$.
   (c) On branche le générateur dans l'autre sens et le proton arrive avec une vitesse $v_0 = 500\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Que se passe-t-il ?
   Même question pour $v_0 = 100\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

2. **Déviation par un champ magnétique uniforme.** On reprend la situation précédente (1.b). Le proton sort de la zone où règne un champ électrique mais est maintenant soumis à un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$.
   (a) Faire le bilan des forces, compléter le schéma.
   (b) Démontrer qu'un mouvement circulaire satisfait aux équations du mouvement et aux conditions initiales. Préciser le rayon et la position du centre.
   (c) Dessiner la trajectoire du proton.

Exercice 3 : Séparation des isotopes par spectrométrie de masse

L'enrichissement de l'uranium a pour but d'élever la teneur en ^{235}U de l'uranium de départ à une valeur optimale pour l'application désirée. Une des méthodes est la spectrographie de masse qui reste la méthode la plus sensible d'analyse isotopique. Elle a été employé pendant la seconde Guerre Mondiale dans l'usine Y12 d'Oak Ridge dans des dispositifs appelés Calutrons. C'est un spectrographe de masse constitué de plusieurs parties :

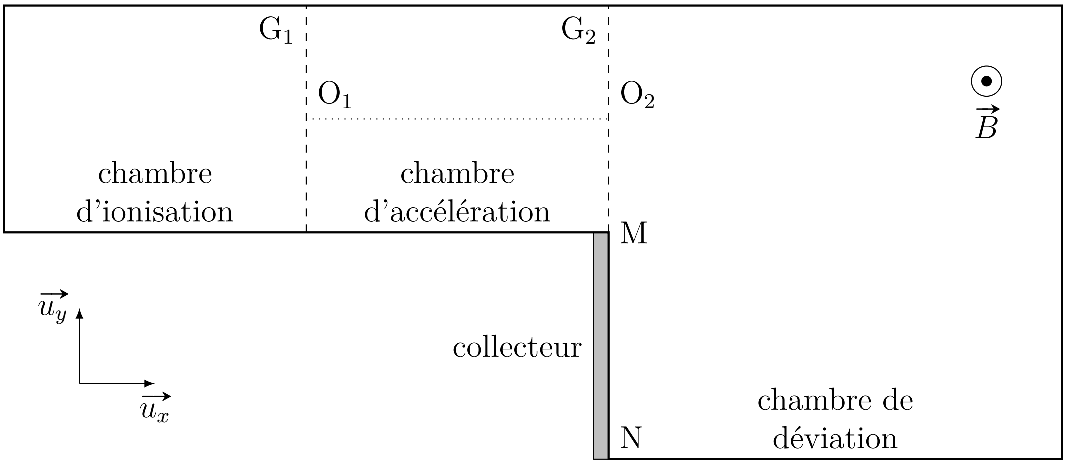
— la chambre d'ionisation dans laquelle des atomes d'uranium 235 et 238 de masses respectives m_1 et m_2 portés à haute température sont ionisés en ions U^+. On considérera qu'à la sortie de cette chambre, en O_1, la vitesse des ions est quasi nulle ;

— la chambre d'accélération dans laquelle les ions sont accélérés entre O_1 et O_2 sous l'action d'une différence de potentiel établie entre les deux grilles G_1 et G_2 ;
— la chambre de déviation dans laquelle les ions sont déviés par un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ de direction perpendiculaire au plan de figure. Un collecteur d'ions est disposé entre M et N. Une fente centrée sur O_2 de largeur L dans le plan de la figure permet de choisir la largeur du faisceau incident. Une fente collectrice centrée sur F est placée entre M et N et a pour largeur L' dans le plan de la figure.

Les chambres sont sous vide. On négligera le poids des ions ainsi que tout type de frottement.

Accélération des ions

1. Quel doit être le signe de la tension $U = V_{G1} - V_{G2}$ pour que les ions soient accélérés entre O_1 et O_2 ?
2. Établir les expressions des vitesses u_1 et u_2 respectivement des ions ^{235}U et ^{238}U lorsqu'ils parviennent en O_2 en fonction de m_1, m_2, e et $U = V_{G1} - V_{G2}$.
3. L'énergie cinétique acquise par les ions en O_2 est de 15,0 keV ; en déduire la valeur de la tension U appliquée entre les deux grilles. Déterminer numériquement les vitesses u_1 et u_2.



Déviation des ions

4. Quel doit être le sens du champ magnétique $\vec{B}$ régnant dans la chambre de déviation pour que les ions puissent atteindre le collecteur ?
5. Déterminer la nature de la trajectoire d'un faisceau homocinétique d'ions $^{235}_{92}U^+$ dans la zone où règne le champ magnétique, exprimer leur rayon de courbure R_1 en fonction de m_1, e, U et $B = \left\|\vec{B}\right\|$. Faire de même pour un faisceau homocinétique d'ions $^{238}_{92}U^+$; on notera R_2 leur rayon de courbure.
6. Le collecteur du Calutron consiste en un récipient métallique muni d'une fente centrée en F de largeur L' placée entre M et N qui permet de recueillir les isotopes 235. Quelle doit être la valeur du champ magnétique régnant dans le calutron sachant que F est placé à $D = 940$ mm de O_2 ?
7. Le faisceau d'ions émis en O_2 est un faisceau parallèle dans le plan de la figure. La fente du collecteur a une largeur de $L' = 4{,}0$ mm. Peut-il y avoir séparation isotopique dans le récipient du collecteur ?
8. L'intensité du faisceau utilisé dans un Calutron est de 100 mA. La source est alimenté en uranium contenant 0,7% de $^{235}U^+$ et 99,3% de $^{238}U^+$. Quelle masse de l'isotope 235 le Calutron peut-il isoler en une année de fonctionnement continu ? On donne $\mathcal{N}_A = 6{,}022 \times 10^{23}$ mol^{-1}.

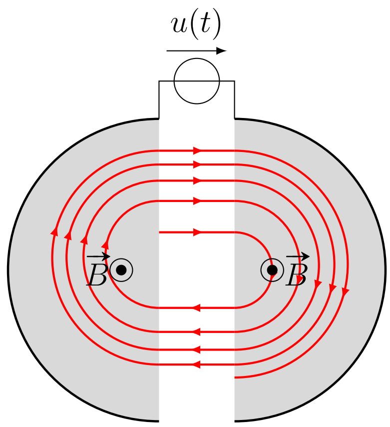
Exercice 4 : Cyclotron

Dans un accélérateur de type cyclotron, on incurve la trajectoire des particules à l'aide de champs magnétiques uniformes dans deux zones en formes de « D », appelés *dees*.

— Entre les *dees* se trouve une petite zone d'accélération où règne un champ électrostatique uniforme qui accélère la particule en ligne droite.

— Après une accélération, la particule entre dans un *dee* où elle parcourt un demi-cercle avant de revenir dans la zone d'accélération, dans laquelle on a pris soin d'inverser le sens de $\vec{E}$.

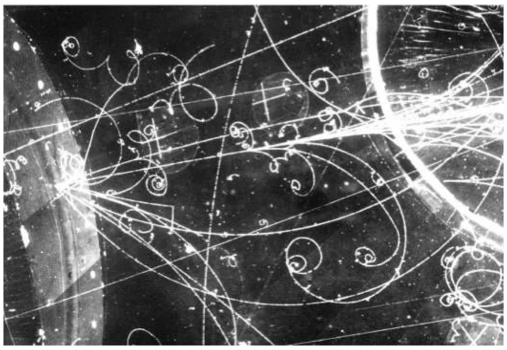
Les rayons des arcs de cercles croissent jusqu'à ce que la particule quitte le cyclotron. Le valeur du champ magnétique uniforme et constant entre les *dees* est $B = 1{,}0$ T. L'amplitude de la tension sinusoïdale générant le champ électrostatique entre les *dees* est $U_m = 2{,}5 \times 10^3$ V.
On s'intéresse au mouvement d'un proton.



1. Démontrer que le mouvement est circulaire uniforme dans le *dee*, donner la vitesse angulaire.
2. Exprimer le temps mis pour parcourir un demi-tour dans le *dee*. Ce temps dépend-il de la vitesse du proton ? Calculer sa valeur numérique.
3. En déduire la fréquence de la tension à appliquer entre les *dees* pour que le champ accélère au mieux les protons (on considère que le temps de passage entre les deux *dees* est négligeable devant les autres temps).
4. Exprimer, puis calculer numériquement (en joule puis en électron-volt) l'augmentation d'énergie cinétique d'un proton à chaque accélération.
5. La vitesse d'un proton étant quasi-nulle, on désire que sa vitesse atteigne 25×10^3 km $\cdot$ s^{-1}. Calculer le nombre de tours que doit faire le proton dans le cyclotron ainsi que le temps nécessaire à cette opération.
6. Quel est le rayon du dernier arc de cercle parcouru par les protons lorsqu'ils ont atteint cette vitesse ? Commenter la valeur obtenue.

Exercice 5 : Particule chargée dans une chambre à bulle

La chambre à bulles est un dispositif mis au point en 1952 par D.A Glaser, pour lequel il obtint le prix Nobel en 1960. Elle fonctionne sur le même principe qu'une chambre à brouillard (dispositif datant de la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle) et est destinée à visualiser des trajectoires de particules subatomiques (très difficiles à observer sans les arrêter, et à différencier).



Il s'agit d'une enceinte remplie d'un liquide à une température légèrement supérieure à celle de vaporisation. Le passage d'une particule chargée déclenche la vaporisation et les petites bulles formées matérialisent la trajectoire de la particule. D'autre part l'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, qui courbe les trajectoires et permet ainsi d'identifier les particules (à partir de leur masse et de leur charge).

Le liquide exerce sur les particules une force de frottement fluide linéaire proportionnelle à leurs vitesses et de coefficient α. Le mouvement d'une particule de charge $q > 0$ et de masse m est étudié dans un repère cartésien dont l'origine O coïncide avec la position initiale de la particule. On néglige leur poids.

Le champ magnétostatique et vecteur vitesse initiale sont dirigés comme suit :

$$\overrightarrow{v_0} = v_0 \cos \alpha \overrightarrow{u_x} + v_0 \sin \alpha \overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$$

1. Établir les équations différentielles couplées du mouvement de la charge.
2. Donner l'expression de $z(t)$. On posera $\tau = m/\alpha$.
3. En manipulant ces deux équations, déterminer les équations différentielles d'ordre deux sur $v_x(t)$, et sur $v_y(t)$.
4. Pour les vitesses v_x et v_y, vers quelle valeur tend la vitesse aux temps long ?
5. Résoudre ces équations à l'aide des conditions initiales. On posera $\Omega = qB/m$. À quoi va ressembler la trajectoire ?
6. Que se passe-t-il si $\alpha = 0$?

Exercice 6 : **Modèle de conduction électrique dans un matériau**

Pour modéliser la conduction électrique dans un matériau, on considère un conducteur cylindrique de section S et de longueur L, dont les deux extrémités sont soumises à une différence de potentiel U. Un champ électrique uniforme, de norme E et dirigé dans le sens de l'axe (Ox) orthogonal à la section S, règne dans le volume du conducteur. Celui-ci contient une densité volumique ρ d'électrons libres, de masse m et de charge $-e$, assurant la conduction électrique. On modélise les chocs entre les atomes du réseau atomique et les électrons libres par une force de frottement fluide linéaire $\overrightarrow{F_f} = -\alpha_f \overrightarrow{v}$.

1. Montrer que les électrons atteignent une vitesse limite $\overrightarrow{v_\infty}$ et donner la durée caractéristique τ d'évolution de cette vitese.
2. En réalisant un calcul de flux d'électrons, exprimer le nombre δn d'électrons traversant la section S du conducteur pendant une durée dt. On suppose que tous les électrons du conducteur ont atteint la vitesse $\overrightarrow{v_\infty}$. En déduire l'expression de la valeur absolue de l'intensité électrique dans ce conducteur.
3. Montrer qu'une relation de proportionnalité unit la tension U aux bornes du conducteur à l'intensité qui la traverse. Définir sa résistance et commenter l'influence des paramètres géométrique L et S.
4. Pour le cuivre, la densité volumique d'électrons libres est $\rho_{\text{cuivre}} = 8{,}49 \times 10^{28}$ électrons $\cdot$ m^{-3}. De plus, on définit sa résistivité comme $\gamma = RS/L$ avec R la résistance du fil, qui vaut $\gamma_{\text{cuivre}} = 1{,}68 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m. En déduire la constante de temps τ.
5. Jusqu'à quelle fréquence est-il raisonnable de considérer que les électrons libres sont en permanence à la vitesse limite ?