M2 : Dynamique cartésienne du point

Exercice 1 : Basket-ball

La hauteur des paniers de basket (au cerceau) est $h = 3{,}05$ m. Au cours d'un match, chaque faute commise est sanctionnée par deux lancers francs. Le joueur chargé du lancer se place à $d = 5{,}40$ m du centre du cerceau. On considère le problème suivant :

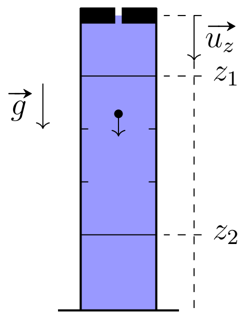
— lorsque la balle quitte la main du lanceur, son centre d'inertie se trouve à une hauteur $H = 2{,}34$ m et à une distance horizontale $D = 5{,}30$ m du panier ;

— le vecteur $\vec{v_0}$ fait un angle $\alpha = 52{,}5°$ avec l'horizontale.

On considère que la balle est en chute libre (on néglige les frottements).

1. Faire un schéma complet en indiquant dessus h, H, d et D.
2. Faire le bilan des forces et compléter le schéma.
3. Déterminer les équations horaires du mouvement.
4. Établir l'expression littérale de la trajectoire.
5. Calculer la valeur que doit avoir v_0 pour que le panier soit marqué.

Exercice 2 : Viscosimètre à billes



Une bille en acier (de masse volumique $\rho_a = 7800\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) de rayon $R = 5$ mm tombe dans de la glycérine (de masse volumique $\rho_g = 1260\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$). La bille subit, lorsqu'elle possède la vitesse $\vec{v}$, une force de frottement fluide :

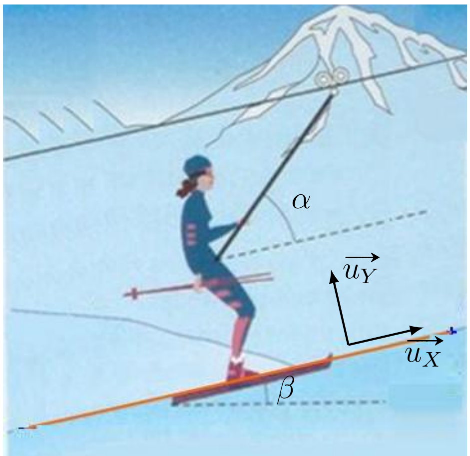
$$\vec{F_f} = -6\pi\eta R\vec{v}$$

où η est une constante appelée viscosité dynamique de la glycérine. L'accélération de la pesanteur vaut $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1. Préciser le référentiel d'étude. Effectuer un bilan complet des forces s'appliquant sur la bille.
2. Exprimer ces forces dans le repère en utilisant les données de l'énoncé : ρ_a, ρ_g, R, η, g et les composantes de la vitesse.
3. Énoncer complètement le principe fondamental de la dynamique.
4. Établir les équations différentielles vérifiées par les trois composantes de la vitesse de la bille.
5. Montrer qu'une des composantes du vecteur vitesse de la bille tend vers une valeur limite non nulle dont on donnera l'expression en fonction des données du problème. Quelle la constante τ du mouvement ?
6. L'expérience est réalisée dans un tube vertical contenant de la glycérine. On lâche la bille à la surface du liquide choisie comme référence des altitudes, puis on mesure la durée $\Delta t = 1{,}6$ s mise pour passer de l'altitude $z_1 = 10$ cm à $z_2 = 50$ cm. On suppose que le régime permanent est atteint. Déterminer la vitesse limite puis la valeur numérique de la viscosité η.

7. Donner la valeur numérique de τ et donner un ordre de grandeur de la distance parcourue pendant ce temps. Pourquoi ne pas avoir réalisé la mesure précédente depuis la surface ?
8. À votre avis, ce dispositif est-il adapté à la mesure de la viscosité de l'eau ? On donne $\eta_{\text{eau}} = 1{,}0 \times 10^{-3}$ Pa · s.

Exercice 3 : Étude d'un remonte-pente



Un skieur est tiré à vitesse constante par un remonte-pente qui exerce sur lui une force $\overrightarrow{F}$ dans l'axe de la tige. La piste fait un angle β avec l'horizontale et la tige du remonte-pente fait un angle α avec la piste (schéma). On néglige toute frottement. La masse du skieur équipé est de 70 kg.

1. Faire le bilan des forces et les représenter sur un schéma.
2. Exprimer ces forces dans la base $(\overrightarrow{u_X}, \overrightarrow{u_Y})$ en fonction de leurs normes, α et β.
3. Que peut-on dire du vecteur accélération du skieur ?
4. Énoncer complètement le principe fondamental de la dynamique.
5. En déduire la norme de $\overrightarrow{F}$: F puis, celle de la réaction de la piste N. Faire l'application numérique avec $\alpha = 30°$ et $\beta = 15°$.

Exercice 4 : Chute freinée d'un aimant

Un aimant de masse $m = 0{,}29$ g est lâché sans vitesse initiale dans un tube cylindrique en cuivre de longueur $L = 1{,}0$ m. Les frottements de l'air sont négligés.

Le mouvement de l'aimant dans le tube génère des courants induits qui s'opposent au déplacement de l'aimant en créant une force de freinage :

$$\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$$

où $\alpha = 0{,}037$ dans les unités du système international.

1. Donner la dimension de α et son unité dans le système international.
2. Définir un référentiel et un repère pour l'étude de la chute de l'aimant.
3. Faire le bilan des forces et en déduire l'équation différentielle sur la vitesse v.
4. Déterminer la vitesse limite de chute de l'aimant. Sur quel intervalle de temps cette vitesse est-elle atteinte ?
5. En déduire une approximation du temps total de chute t_c. Comparer avec le cas de la chute libre.

Exercice 5 : Ouverture d'un parachute

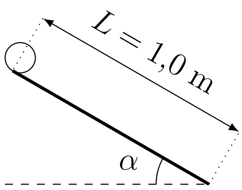
Un parachutiste a ouvert son parachute à une altitude h_1. On considère la trajectoire verticale du centre d'inertie G de l'ensemble sauteur-parachute. Cet ensemble, de masse $m = 90$ kg subit de la part de l'air une force $\overrightarrow{F}$, opposée à la vitesse, de norme $\left\|\overrightarrow{F}\right\| = \dfrac{1}{2}\rho K v^2$, où v est la vitesse du parachutiste, $\rho = 1{,}3$ kg · m^{-3} et $K = 38$ dans les unités du S.I. On négligera la poussée d'Archimède.

1. Quelle est l'unité de K ?
2. On note $v = \dot{z}$ la coordonnée de la vitesse sur un axe vertical ascendant. Montrer que :
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{K\rho}{2m}v^2 = -g$$
3. Cette vitesse diminue rapidement puis se stabilise à une valeur v_2.
   (a) Adimensionner l'équation obtenue. Identifier le temps typique d'évolution et la vitesse caracactéristique.
   (b) Déterminer l'expression de v_2 et calculer sa valeur.

Exercice 6 : Cycliste en descente

Déterminer la vitesse maximale qu'atteint un cycliste en descente en fonction de la pente, en ne prenant en compte que les frottements de l'air. Faire l'application numérique pour une pente de 5 %, puis de 10 %. Commenter.
La force de frottement exercée par l'air est :
$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S c_x v \vec{v}$$
Où $\vec{v}$ désigne le vecteur vitesse, $\rho = 1{,}3$ kg·m^{-3} la masse volumique de l'air et $Sc_x = 0{,}3$ m^2 une constante qui dépend des propriétés aérodynamiques et de la surface du cycliste.

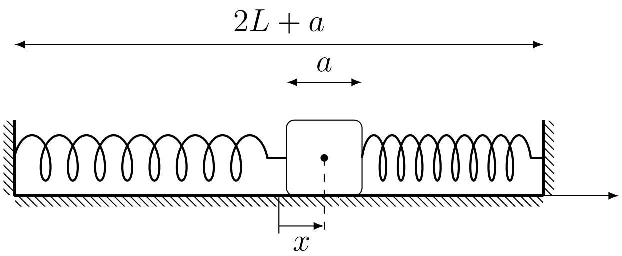
Exercice 7 : Mouvement d'une bille sur un plan incliné



On considère une bille laissée au repos en haut d'un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale. Elle y roule sans frottement.
1. Déterminer un repère bien choisi pour l'étude du mouvement, établir les équations horaires du mouvement dans ce repère. À quel moment arrive-t-elle en bas ? Quelle vitesse à-t-elle alors ?
2. On suppose désormais que la bille possède une vitesse initiale perpendiculaire au plan du schéma ci-contre. Déterminer les équations horaires du mouvement et la trajectoire de la bille.

Exercice 8 : Masse maintenue par deux ressorts

On considère une masse m suspendue entre deux ressorts comme sur le schéma ci-dessous :



On néglige les frottements sur le support. Les deux ressorts sont identiques : leur raideur est notée k et leur longueur à vide ℓ_0.

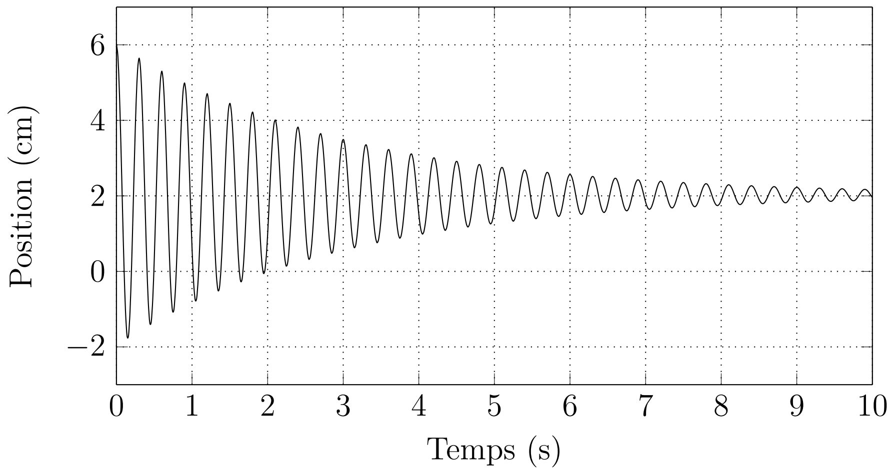
1. Exprimer la longueur des deux ressorts en fonction de L et de x.
2. Faire le bilan des forces et représenter les forces sur le schéma.
3. Établir une équation différentielle sur la position $x(t)$.
4. En déduire la pulsation propre de cet oscillateur.

Exercice 9 : Le système masse-ressort

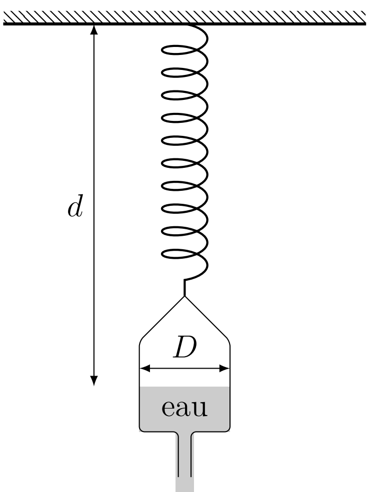
Lorsque qu'une masse est suspendue par un ressort et que l'on prend en compte les frottements fluides de l'air, le principe fondamental de la dynamique donne, pour la position x de la masse :

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - k\left(x - x_e\right)$$

Nous avons pesé la masse du mobile $m = 100$ g. Déterminer à partir du graphique de la position $x(t)$ les valeurs de k, h et x_e.



Exercice 10 : Un récipient percé suspendu



Un cylindre ouvert de diamètre $D = 30$ cm contient de l'eau, de masse volumique 1000 $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Ce cylindre est accroché via un ressort de raideur k à une paroi horizontale fixe. L'eau peut s'évacuer par un trou placé à la base du cylindre. Quelle valeur doit-on donner à k pour que la distance d entre la surface de l'eau et la paroi horizontale soit maintenue constante ? On prendra $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.