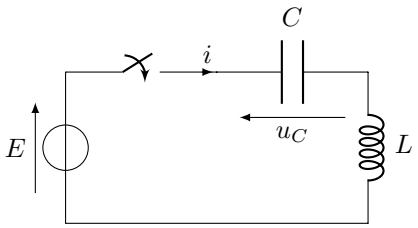
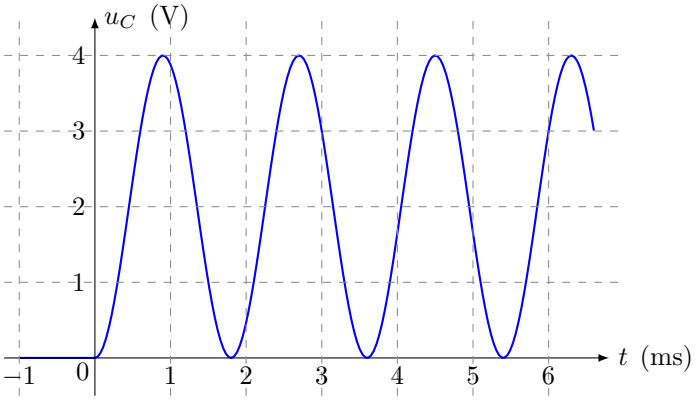
E3 : L'oscillateur harmonique et amorti

Exercice 1 : Échelon de tension

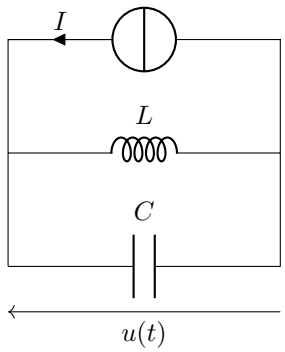
Considérons le circuit ci-dessous. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Le condensateur est initialement déchargé.





1. Quelle est la période des oscillations ? En déduire la fréquence et la pulsation correspondante.
2. Quelle est l'amplitude des oscillations ? Quelle est leur valeur moyenne ?
3. Exprimer u_C peu avant la fermeture de l'interrupteur. En déduire u_C à $t = 0^+$.
4. Exprimer l'intensité dans le circuit i peu avant la fermeture de l'interrupteur. En déduire i à $t = 0^+$.
5. Établir l'équation différentielle du circuit une fois l'interrupteur fermé.
6. Résoudre cette équation différentielle en utilisant les conditions initiales.
7. On donne $C = 220$ nF. En déduire L.

Exercice 2 : Circuit LC parallèle



On considère le circuit ci-contre. Initialement, le condensateur n'est pas chargé et la bobine n'est parcourue par aucun courant.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension u (on pourra dériver la loi des nœuds pour faire apparaître u).
2. Déterminer $u(0)$.
3. Déterminer $i_C(0)$. En déduire $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0)$.
4. En déduire la solution $u(t)$ à partir des conditions initiales. La tracer.

Exercice 3 : Le pendule de Foucault

Afin de démontrer la rotation de la Terre sur elle-même, l'astronome Léon Foucault a réalisé une expérience historique sous la coupole du Panthéon à Paris.

Il y accroche un pendule de longueur $\ell = 67$ m constitué d'une boule de plomb de masse $m = 28$ kg et de rayon $R = 9$ cm. La période des oscillations obtenue est de 16,4 s. Le pendule s'amortit complètement en environ 6h.

1. On peut montrer que l'angle θ entre le pendule et la verticale évolue au cours du temps selon l'équation différentielle
$$\ddot{\theta}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\theta(t) = 0$$
où g est l'accélération de la pesanteur et α le coefficient de frottement fluide. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité associé à cet oscillateur.
2. On veut confronter le modèle à l'expérience :
   (a) Exprimerer la période propre de cet oscillateur en fonction de g et de ℓ, en déduire l'expression et la valeur de g.
   (b) Estimer la valeur du facteur de qualité Q à l'aide des données.
   (c) Estimer alors le coefficient de frottement fluide α.
   (d) Le modèle de Stokes prévoit qu'une boule évoluant dans l'air subit un frottement de coefficient $\alpha = 6\pi\eta R$ où $\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}$ Pa · s est la viscosité de l'air à température ambiante. Comparer avec la valeur trouvée précédemment.

Exercice 4 : Un RLC surprenant

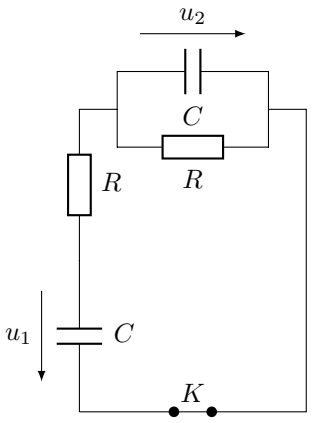
On considère un circuit composé des dipôles suivants en série : un générateur de tension idéal de force électromotrice E, un interrupteur K, une résistance R et un bloc LC parallèle.

Le régime permanent est établi avant la fermeture de l'interrupteur. On ferme celui-ci à $t = 0$. On donne $R = 1{,}00$ kΩ, $L = 1{,}00$ mH et $C = 1{,}00$ nF. On étudie la tension u aux bornes du condensateur.

1. Faire un schéma du circuit électrique.
2. Déterminer la condition initiale sur u et sa dérivée.
3. Faire l'étude du régime permanent atteint.
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par u.
5. Résoudre cette équation.

Exercice 5 : Étude du circuit du Wien

On considère le circuit suivant.



Les conditions initiales sont les suivantes :

- pour $t < 0$: l'interrupteur K est ouvert et le condensateur 1 est chargé avec une tension $u_1 = E = 5$ V et le condensateur 2 est vide ($u_2 = 0$ V).
- À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

1. Déterminer $u_2\left(0^+\right)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\left(0^+\right)$.
2. Déterminer u_2 en régime permanent.
3. Justifier alors que ce circuit ne peut pas être régit par une équation différentielle du premier ordre.
4. Déterminer $u_2(t)$. Tracer l'allure de $u_2(t)$.