Interrogation de cours n°8

21 novembre 2024

NOM :

Calculatrices interdites. Répondez de manière complète mais brève.

1. Donner la forme canonique de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique et sa solution générale.

La forme canonique de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 f = 0$$

Sa solution générale est :

$$f(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

2. Donner l'expression d'un signal sinusoïdal, avec le vocabulaire associé. Préciser comment est relié ω à la période et à la fréquence du signal.

Le signal sinusoïdal est :

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

A désigne l'amplitude, ω la pulsation et φ la phase à l'origine. On a :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Interrogation de cours n°8

21 novembre 2024

NOM :

Calculatrices interdites. Répondez de manière complète mais brève.

1. Donner la forme canonique de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique et sa solution générale.

La forme canonique de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 f = 0$$

Sa solution générale est :

$$f(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

2. Donner l'expression d'un signal sinusoïdal, avec le vocabulaire associé. Préciser comment est relié ω à la période et à la fréquence du signal.

Le signal sinusoïdal est :

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

A désigne l'amplitude, ω la pulsation et φ la phase à l'origine. On a :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

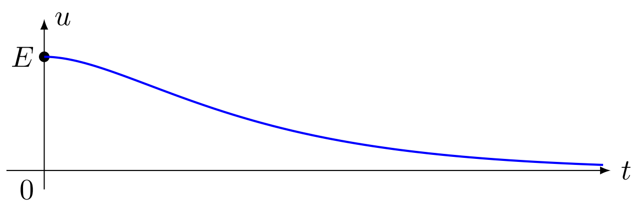
3. Écrire la forme canonique de l'équation différentielle de l'oscillateur amorti en définissant le vocabulaire associé.
   - Donner avec démonstration la condition sur Q pour oberver un régime apériodique.
   - Donner alors les racines de l'équation caractéristique et la solution générale de l'équation différentielle. Tracer l'allure de la courbe pour $u(0) = E$ et $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t(0) = 0$.
   - Quelle est la durée du régime transitoire ?

On définit le facteur de qualité et la pulsation propre à partir de la forme canonique de l'équation différentielle de l'oscillateur amorti : $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$. ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur amorti et Q le facteur de qualité. L'équation caractéristique associée est $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$. Le régime est apériodique si les racines sont réelles, autrement dit $\Delta > 0$ soit :

$$\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4 \times 1 \times \omega_0^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\omega_0^2}{Q^2} > 4\omega_0^2 \quad \Longleftrightarrow \quad Q^2 < \frac{1}{4}$$

Le régime est apériodique si $Q < 1/2$. Dans ce cas, les racines sont $r_\pm = \dfrac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\dfrac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega_0^2}$

La solution générale de l'équation est $\boxed{u(t) = A\exp(r_+ t) + B\exp(r_- t)}$



Les conditions initiales sont

$$u(0) = E \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$$

La durée du régime transitoire est $3/(Q\omega_0)$.

---

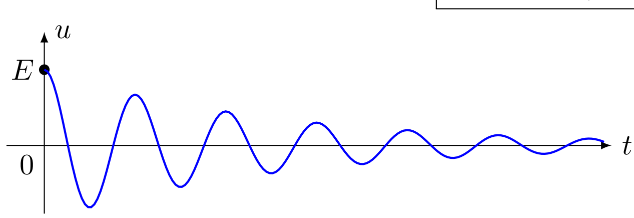
3. Écrire la forme canonique de l'équation différentielle de l'oscillateur amorti en définissant le vocabulaire associé.
   - Donner avec démonstration la condition sur Q pour oberver un régime pseudo-périodique.
   - Donner alors les racines de l'équation caractéristique et la solution générale de l'équation différentielle. Tracer l'allure de la courbe pour $u(0) = E$ et $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t(0) = 0$.
   - Quelle est la durée du régime transitoire ?

On définit le facteur de qualité et la pulsation propre à partir de la forme canonique de l'équation différentielle de l'oscillateur amorti : $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$. ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur amorti et Q le facteur de qualité. L'équation caractéristique associée est $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$. Le régime est pseudo-périodique si les racines sont complexes, autrement dit $\Delta < 0$ soit :

$$\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4 \times 1 \times \omega_0^2 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\omega_0^2}{Q^2} < 4\omega_0^2 \quad \Longleftrightarrow \quad Q^2 > \frac{1}{4}$$

Le régime est pseudo-périodique si $Q > 1/2$. Dans ce cas, les racines sont $r_\pm = \dfrac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{i}\omega$

La solution générale de l'équation est $\boxed{u(t) = \exp\left(-\dfrac{\omega_0}{2Q} t\right)\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]}$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$



Les conditions initiales sont

$$u(0) = E \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$$

La durée du régime transitoire est QT_0.