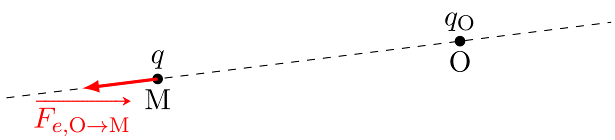
Interrogation de cours n°17

13 février 2025

NOM :

Calculatrices interdites. Répondez de manière complète mais brève.

1. Donner l'expression de la force électrostatique entre deux charges (avec un schéma pour deux charges de même signe) et l'énergie potentielle associée.



$$\overrightarrow{F_{e,\mathrm{O}\to\mathrm{M}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_\mathrm{O}q}{r^3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

où $r = \mathrm{OM}$ et ε_0 est la permittitivité diélectrique du vide. Ainsi :

$$E_p(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_\mathrm{O}q}{r}$$

2. Énoncer la première loi de Képler.

Dans le référentiel héliocentrique, les orbites des planètes sont des ellipses dont le centre du Soleil est l'un des foyers.

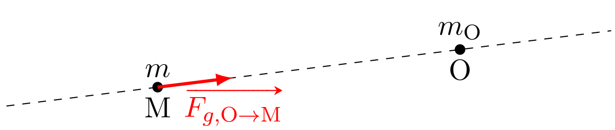
Interrogation de cours n°17

13 février 2025

NOM :

Calculatrices interdites. Répondez de manière complète mais brève.

1. Donner l'expression de la force gravitationnelle entre deux masses (avec un schéma) et l'énergie potentielle associée.



$$\overrightarrow{F_{g,\mathrm{O}\to\mathrm{M}}} = -\mathcal{G}\frac{m_\mathrm{O}m}{r^3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

où $r = \mathrm{OM}$ et $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation universelle. Ainsi :

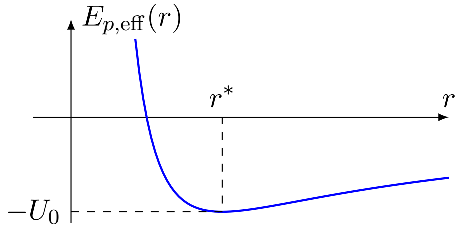
$$E_p(r) = -\mathcal{G}\frac{m_\mathrm{O}m}{r}$$

2. Énoncer la troisième loi de Képler.

On note T la période de révolution d'une planète autour du Soleil (de masse M_S) et a le demi-grand axe de l'ellipse :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_\mathrm{S}}$$

3. Pour une force attractive, dessiner l'allure de l'énergie potentielle effective et donner les trajectoires possibles en fonction de la valeur de l'énergie mécanique.



— Si $E_m = -U_0$, alors la trajectoire est circulaire de rayon r^* ;
— si $-U_0 < E_m < 0$, alors la trajectoire est elliptique de foyer O ;
— si $E_m = 0$, alors la trajectoire est parabolique de foyer O ;
— si $E_m > 0$, alors la trajectoire est hyperbolique de foyer O.

4. Démontrer qu'un mouvement à force centrale est plan. Donner l'expression de la constante des aires et expliquer d'où vient son expression.

Le moment d'une force centrale de centre O par rapport à son centre de force est $\overrightarrow{\mathcal{M}_\text{O}\left(\vec{F}\right)} = \overrightarrow{\text{OM}} \wedge \vec{F} = \vec{0}$. D'après le théorème du moment cinétique en O appliqué au point M $\text{d}\overrightarrow{\mathcal{L}_\text{O}}/\text{d}t = \vec{0}$: le moment cinétique se conserve. Or :

$$\overrightarrow{\mathcal{L}_\text{O}} = m\overrightarrow{\text{OM}} \wedge \vec{v}$$

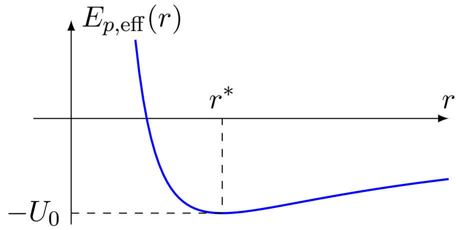
Comme résultat du produit vectoriel, le vecteur $\overrightarrow{\text{OM}}$ et le vecteur vitesse sont orthogonaux à la direction (constante) du moment cinétique, et ce à tout moment : le mouvement se fait dans le plan contenant O et perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathcal{L}_\text{O}}$. On considère les coordonnées cylindriques centrées sur O : $\overrightarrow{u_z}$ est la direction de de $\overrightarrow{\mathcal{L}_\text{O}}$. Comme $\overrightarrow{\text{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r}$ et $\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$, alors :

$$\overrightarrow{\mathcal{L}_\text{O}} = m\overrightarrow{\text{OM}} \wedge \vec{v} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

La constante des aires $C = \mathcal{L}_z/m = r^2\dot{\theta}$ est constante.

---

3. Pour une force attractive, dessiner l'allure de l'énergie potentielle effective et donner les trajectoires possibles en fonction de la valeur de l'énergie mécanique.



— Si $E_m = -U_0$, alors la trajectoire est circulaire de rayon r^* ;
— si $-U_0 < E_m < 0$, alors la trajectoire est elliptique de foyer O ;
— si $E_m = 0$, alors la trajectoire est parabolique de foyer O ;
— si $E_m > 0$, alors la trajectoire est hyperbolique de foyer O.

4. Démontrer, pour un mouvement circulaire de rayon R autour de la Terre de masse M_T, l'expression de sa vitesse et de son énergie mécanique en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et R.

On étudie le mouvement d'un satellite, assimilé à un point matériel M de masse m, dans le référentiel géocentrique. On repère la Terre par le point T et on utilise la base polaire centrée sur T : $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$. Le mouvement est circulaire ainsi $\vec{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ et $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$. Sur le satellite ne s'exerce que la force gravitationnelle ainsi, d'après le PFD projeté sur $\overrightarrow{u_r}$:

$$-mR\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G}\frac{mM_\text{T}}{R^2} \qquad \text{ainsi} \qquad \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_\text{T}}{R^3}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\vec{v} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_\text{T}}{R}}\overrightarrow{u_\theta}}$$

L'énergie mécanique est :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}M_\text{T}m}{r} = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{G}M_\text{T}}{R} - \frac{\mathcal{G}M_\text{T}m}{R} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{E_m = -\frac{\mathcal{G}M_\text{T}m}{2R}}$$