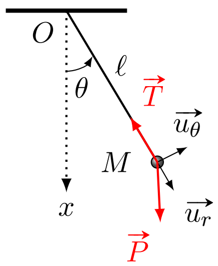
Interrogation de cours n°16

6 février 2025

NOM :

Calculatrices interdites. Répondez de manière complète mais brève.

1. Obtenir l'équation du pendule simple en utilisant le théorème du moment cinétique.



On considère la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$. S'appliquent le poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = mg\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - mg\sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$ et la tension du fil $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u_r}$; dont les moments sont :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O\left(\overrightarrow{P}\right)} = (\ell\overrightarrow{u_r}) \wedge (mg\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - mg\sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}) = -mg\ell\sin\theta\overrightarrow{u_z}$$

et $\overrightarrow{\mathcal{M}_O\left(\overrightarrow{T}\right)} = (\ell\overrightarrow{u_r}) \wedge (-T\,\overrightarrow{u_r}) = \overrightarrow{0}$. On exprime le moment cinétique : $\overrightarrow{\mathcal{L}_O} = m\,(\ell\overrightarrow{u_r}) \wedge \ell\dot\theta\overrightarrow{u_\theta} = m\ell^2\dot\theta\overrightarrow{u_z}$; ainsi on applique le TMC, projeté sur $\overrightarrow{u_z}$:

$$m\ell^2\ddot\theta = -mg\ell\sin\theta + 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ddot\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

2. Donner la définition du moment cinétique par rapport à un point O.

On définit le moment cinétique d'un point M, par rapport à un point O ainsi :

$$\overrightarrow{\mathcal{L}_O} = m\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \overrightarrow{v}$$

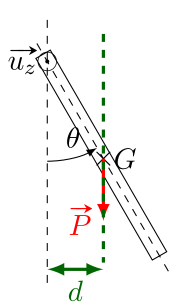
Interrogation de cours n°16

6 février 2025

NOM :

Calculatrices interdites. Répondez de manière complète mais brève.

1. Obtenir l'équation du pendule pesant pour un objet de masse m, de moment d'inertie J. On note a la distance du pivot au centre de gravité. On suppose le pivot parfait.



On suppose le pivot parfait donc il n'exerce aucun moment. Le poids exerce le moment $-mga\sin\theta$: en effet le bras de levier est le côté opposé à θ donc $a\sin\theta$, et il fait tourner dans le sens $-$. Ensuite, le moment cinétique est

$$L_z = J\dot\theta \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J\ddot\theta$$

Donc :

$$J\ddot\theta = -mga\sin\theta \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot\theta + \frac{mga}{J}\sin\theta = 0}$$

2. Donner la définition du moment cinétique par rapport à un axe orienté $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_z})$.

On définit le moment cinétique d'un point M, par rapport à un axe orienté $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_z})$ ainsi :

$$\mathcal{L}_z\left(\overrightarrow{F}\right) = m\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \overrightarrow{v}\right) \cdot \overrightarrow{u_z}$$

3. Donner la définition du moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe orienté $(\mathrm{O}, \vec{u_z})$.

On définit le moment d'une force $\vec{F}$, s'appliquant en un point M, par rapport à un axe orienté $(\mathrm{O}, \vec{u_z})$ ainsi :

$$\mathcal{M}_z\left(\vec{F}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{u_z}$$

4. Définir la rotation autour d'un axe fixe, puis une liaison pivot parfaite.

Si un solide est en **rotation**, tous les points ont un mouvement circulaire autour d'un même axe z.
Une **liaison pivot** restreint le mouvement à la seule rotation autour d'un axe. Elle est **parfaite** si elle n'exerce pas de moment par rapport à cet axe.

5. Définir le moment d'inertie d'un ensemble de point M_i de masses m_i, donner le moment cinétique correspondant.

Le moment d'inertie est

$$J_z = \sum_i m_i r_i^2$$

où r_i désigne la distance OM_i. On a alors :

$$L_z = J_z \dot{\theta}$$

---

3. Donner la définition du moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point O.

On définit le moment d'une force $\vec{F}$, s'appliquant en un point M, par rapport à un point O ainsi :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O\left(\vec{F}\right)} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F}$$

4. Définir la translation, puis un couple de forces.

Si un solide est en **translation**, tous les points ont le même vecteur vitesse.
Un **couple** de forces est un ensemble de force dont la somme est nulle mais le moment total ne l'est pas.

5. Définir le moment d'inertie d'un ensemble de point M_i de masses m_i, donner l'énergie cinétique correspondante.

Le moment d'inertie est

$$J_z = \sum_i m_i r_i^2$$

où r_i désigne la distance OM_i. On a alors :

$$E_c = \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2$$