Interrogation de cours n°13

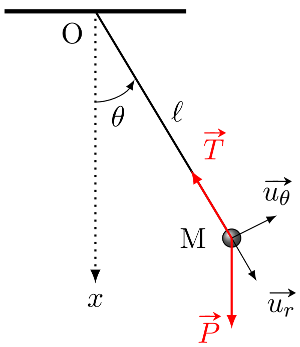
16 janvier 2025

NOM :

Calculatrices interdites. Répondez de manière complète mais brève.

1. Obtenir en utilisant le théorème de la puissance cinétique l'équation du mouvement du pendule simple. On note ℓ la longueur du pendule, m la masse et g l'accélération de la pesanteur. On pourra admettre l'expression de la vitesse.

On étudie le mouvement d'une masse, assimilée à un point matériel M, suspendue à un fil, dans le référentiel de la salle de classe. On fixe l'origine au point d'accroche du fil et on se dote de la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ centrée sur O, θ étant l'angle par rapport à la verticale (sens trigonométrique). Le mouvement est circulaire donc la vitesse est $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$. Ainsi l'énergie cinétique est :



$$E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

Sur la masse s'exerce son poids $\vec{P}$ et la tension du fil $\vec{T}$. $\vec{v}$ et $\vec{T}$ sont perpendiculaires, l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{P}$ est $\pi/2+\theta$:

$$\vec{T}\cdot\vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{P}\cdot\vec{v} = mg\times\ell\dot{\theta}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -mg\sin\theta\,\ell\dot{\theta}$$

On applique le théorème de la puissance cinétique :

$$m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0 - mg\sin\theta\,\ell\dot{\theta} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

Interrogation de cours n°13

16 janvier 2025

NOM :

Calculatrices interdites. Répondez de manière complète mais brève.

1. Définir le travail élémentaire d'une force et donner le déplacement élémentaire en coordonnées sphériques.

Le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ est : $$\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

où $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est le déplacement élémentaire, soit $\mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}$ en coordonnées sphériques.

2. On lâche une craie sans vitesse initiale d'une hauteur $h = 2$ m. Déterminer sa vitesse d'impact au sol par le théorème énergétique de votre choix. On prendra $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

On étudie le mouvement de la craie, assimilé à un point matériel M de masse m, dans le référentiel de la salle de classe. On considère le point A comme étant l'endroit d'où est lâché l'objet et le point B comme son point d'impact au sol. L'énergie cinétique initiale est nulle car la craie est lâché sans vitesse : $E_c(\mathrm{A}) = 0$. Au moment de l'impact, elle vaut $E_c(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}mv^2$ (v est l'inconnue). Ainsi $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}mv^2$. Seul le poids s'applique, son travail est $W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{P}\right) = mg\left(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}\right) = mgh$. On applique le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \qquad \text{donc} \qquad \boxed{v = \sqrt{2gh} = 6{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

2. Définir le travail élémentaire d'une force, donner le déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques.

Le travail élémentaire d'une force $\overrightarrow{F}$ est : $$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

où $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est le déplacement élémentaire, soit $\mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$ en coordonnées cylindriques.

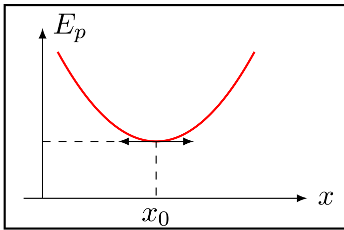
3. Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique.

L'énergie potentielle élastique est : $E_{p,\text{él}} = \dfrac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2$ — k est la raideur du ressort, ℓ sa longueur et ℓ_0 sa longueur à vide.

4. Énoncer le théorème de l'énergie mécanique.

Dans un référentiel galiléen : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_{NC}}\right)$ où $\overrightarrow{F_{NC}}$ désignent les forces non-conservatives.

5. Définir une position d'équilibre stable. Illustrer la réponse avec un graphique.



On a une position d'équilibre en x_0 si : $\dfrac{\partial E_p}{\partial x}(x_0) = 0$

Elle est stable si : $\dfrac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0) > 0$

---

2. Déterminer (avec démonstration et schéma) le travail de la force d'un rappel d'un ressort (raideur k, longueur à vide ℓ_0) lorsque sa longueur varie de ℓ_A à ℓ_B.

Notons O le point d'attache du ressort et x tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\overrightarrow{u_x} = \ell\overrightarrow{u_x}$. La force de rappel est :

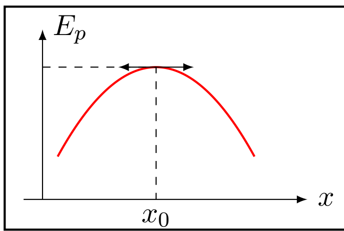
$$\overrightarrow{F} = -k\left(x - \ell_0\right)\overrightarrow{u_x} \qquad \text{donc} \qquad \delta W\left(\overrightarrow{F}\right) = -k\left(x - \ell_0\right)\mathrm{d}x$$

$$W_\mathrm{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = \int_{x=\ell_\mathrm{A}}^{\ell_\mathrm{B}} -k\left(x - \ell_0\right)\mathrm{d}x \quad \text{soit} \quad \boxed{W_\mathrm{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = -\frac{1}{2}k\left[\left(\ell_\mathrm{B} - \ell_0\right)^2 - \left(\ell_\mathrm{A} - \ell_0\right)^2\right]}$$

3. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.

L'énergie potentielle de pesanteur est : $E_{p,p} = mgz$ — z est la verticale ascendante, m la masse et g l'accélération de la pesanteur.

4. Définir une position d'équilibre instable. Illustrer la réponse avec un graphique.



On a une position d'équilibre en x_0 si : $\dfrac{\partial E_p}{\partial x}(x_0) = 0$

Elle est instable si : $\dfrac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0) < 0$