DS n°7

samedi 29 mars 2025

MPSI1 & 2 – 2024/2025

Consignes

- ▷ L'usage de la calculatrice est **autorisé**.
- ▷ Répondez aux exercices que vous pensez savoir traiter en premier. Signalez clairement lorsque vous changez d'exercice. Prenez le temps de bien lire les questions. Les trois exercices sont indépendants.
- ▷ La notation sera particulièrement sensible à la précision et à la clarté des arguments. En particulier, et sauf si la question le demande explicitement, **les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte**.
- ▷ **La qualité de la rédaction et le soin** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. La réponse à une question prend la forme d'une **formule littérale encadrée** ou soulignée. L'application numérique (avec la bonne unité et le bon nombre de chiffres signficatifs) doit être réalisée ensuite.
- ▷ Bon courage !

Exercice 1 : Mouvement dans un champ gravitationnel

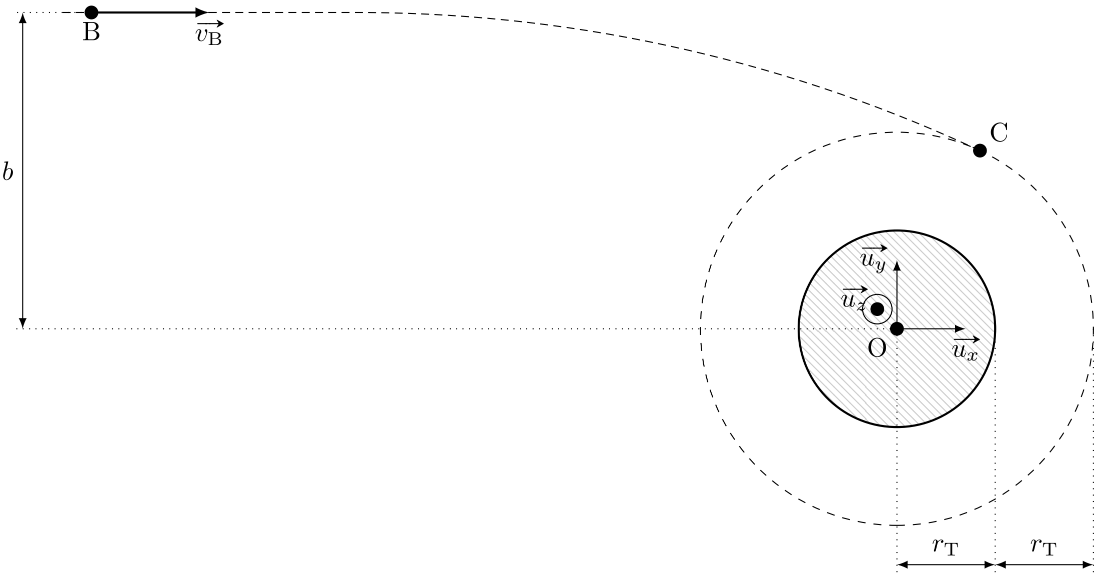
1.1 Étude générale du mouvement

Soit un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen d'origine O. Un point matériel de masse m_{O} est placé en O. On se propose d'étudier le mouvement d'un point matériel M de masse m dans ce référentiel.

1. (a) Donner l'expression de la force $\overrightarrow{F}$ qu'exerce O sur M.
   (b) Faire figurer cette force sur un schéma où apparaissent les points O et M.
2. (a) Montrer que le moment cinétique en O de M, notée $\overrightarrow{\mathcal{L}_{\mathrm{O}}}$ est une consante du mouvement.
   (b) En déduire que le mouvement de M dans $\mathcal{R}$ est situé dans un plan que l'on précisera.
3. On définit l'axe (Oz), où $\overrightarrow{u_z}$ est tel que $\overrightarrow{\mathcal{L}_{\mathrm{O}}} = \left\|\overrightarrow{\mathcal{L}_{\mathrm{O}}}\right\| \overrightarrow{u_z}$. Les axes (O$x$) et (O$y$) sont choisis de telle façon que la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ soit orthonormée directe. On définit ensuite une base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ orthonormée directe où θ désigne l'angle $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_r})$.
   (a) Faire un schéma représentant O, M, $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{u_z}$, $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$, θ, $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{\mathcal{L}_{\mathrm{O}}}$.
   (b) Exprimer le moment cinétique $\mathcal{L}_z$ de M par rapport à l'axe $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_z})$ en fonction de m, r et $\dot{\theta}$.
4. (a) Calculer l'énergie potentielle, notée E_p liée à $\overrightarrow{F}$ en prenant la convention :
   $$\lim_{r\to+\infty} E_p(r) = 0$$
   (b) En déduire l'expression de l'énergie mécanique de M en fonction de m, v (la norme du vecteur vitesse de M dans $\mathcal{R}$), $\mathcal{G}$ (la constante de gravitation universelle), m_{O} et r.
   (c) Exprimer v en fonction de $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ et r.
   (d) À l'aide de la question 3.b), montrer que :
   $$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r) \qquad \text{où} \qquad E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{\mathcal{L}_z^2}{2mr^2} - \frac{\mathcal{G}mm_{\mathrm{O}}}{r}$$
   (e) Tracer l'allure de $E_{p,\text{eff}}(r)$. Donner selon la valeur de l'énergie mécanique la nature de la trajectoire.
5. Étude de la trajectoire circulaire.
   (a) Déterminer l'expression de la vitesse d'un satellite en orbite circulaire de rayon R en partant des équations de la mécanique. On donnera l'expression en fonction de $\mathcal{G}$, m_{O} et R.
   (b) En déduire l'expression de l'énergie mécanique en fonction de $\mathcal{G}$, m_{O}, m et R.
   (c) **Démontrer** l'expression de l'énergie mécanique pour une ellipse de demi-grand axe a.
6. On définit le vecteur de Runge-Lenz :
   $$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{u_\theta} - \frac{\mathcal{L}_z}{\mathcal{G}mm_{\mathrm{O}}}\overrightarrow{v}$$
   Montrer que ce vecteur est une constante du mouvement.

1.2 Application : retour de mission spatiale

On étudie un véhicule spatial M de masse m qui rentre sur Terre (masse M_T, rayon r_T, placée en O) après une longue mission. Ce véhicule arrive au point B avec une vitesse $\overrightarrow{v_\mathrm{B}}$ et présente un « paramètre d'impact » b (voir schéma). On considèrera que B est assez éloigné de la Terre pour négliger l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle de M avec la Terre.



1. Calculer l'énergie mécanique de M en B. En déduire la nature de la trajectoire de M.
2. Exprimer le moment cinétique en O de M en fonction de b, $v_0 = \|\overrightarrow{v_\mathrm{B}}\|$, m et $\overrightarrow{u_z}$.
3. On veut que le véhicule spatial arrive au point C avec une vitesse tangente à l'orbite circulaire passant par C (de rayon $2r_\mathrm{T}$).
   (a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ et $\overrightarrow{v_\mathrm{C}}$? En déduire une expression du moment cinétique en O de M en fonction de r_T, $v_\mathrm{C} = \|\overrightarrow{v_\mathrm{C}}\|$, m et $\overrightarrow{u_z}$.
   (b) En déduire la distance b nécessaire à l'opération en fonction de r_T, $\mathcal{G}$, M_T et v_0. Faire l'application numérique. On donne $r_\mathrm{T} = 6\,370$ km, $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}}$, $m_\mathrm{T} = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg et $v_0 = 2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.
4. Par un raisonnement similaire, déterminer la distance minimale b_min pour que le véhicule spatial évite la Terre.
5. Au point C, on veut que le véhicule spatial passe sur l'orbite circulaire de rayon $2r_\mathrm{T}$. Que faut-il faire ? Déterminer littéralement (en fonction de M_T, r_T, b, v_0 et $\mathcal{G}$) puis calculer numériquement Δv_C.
6. (a) Si rien n'est fait au point C, tracer l'allure de la trajectoire.
   On appelle D le point sur la trajectoire à l'infini après que le véhicule s'est éloigné de la Terre. On définit la déviation comme l'angle orienté entre $\overrightarrow{v_\mathrm{B}}$ et $\overrightarrow{v_\mathrm{D}}$ (attention à son signe).
   (b) Que peut-on dire des normes des vitesses en B et en D ?
   (c) Calculer le vecteur $\overrightarrow{A}$ (partie précédente) en B et en D (on explicitera l'expression des deux vecteurs dans la base cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$).
   (d) En déduire la déviation totale du véhicule sur sa trajectoire en fonction de $\mathcal{G}$, m_T, b et v_0. On pourra utiliser les formules trigonométriques $1 - \cos\alpha = 2\sin^2(\alpha/2)$ et $\sin\alpha = 2\cos(\alpha/2)\sin(\alpha/2)$. Faire l'application numérique.

Exercice 2 : Concentration en CO_2 atmosphérique, acidité des océans et solubilité

Le dioxyde de carbone est un des constituants minoritaires de l'atmosphère dont les effets sont pourtant importants. D'une part, le dioxyde de carbone est à la base de la chaine alimentaire. Les végétaux l'absorbent par photosynthèse et le métabolisent en chaînes carbonées. D'autre part, le dioxyde de carbone est un des gaz participant à l'effet de serre en laissant passer le rayonnement visible du soleil qui réchauffe la Terre mais absorbant le rayonnement infrarouge émis par cette dernière pour se refroidir. Enfin, le dioxyde de carbone atmosphérique impacte le pH des océans : il forme en effet, en se dissolvant dans l'eau, l'acide carbonique.

L'étude de carottes de glace et de sédiments nous a montré que la concentration en dioxyde de carbone varie naturellement sur l'échelle du millier d'années. Ainsi, la Terre a déjà dans le passé été confrontée à des « emballement climatiques » : par exemple, à la fin du Paléocène, les températures ont augmenté de 5 à 8°C en l'espace de 20 000 ans.

À l'échelle de vie des sociétés humaines, l'argument que « la concentration en dioxyde de carbone a toujours évolué » est faux. Les civilisations humaines ont émergé il y a environ 10 000 ans pendant le dernier âge interglaciaire (qui est toujours en cours) dans lequel la concentration en CO_2 atmosphérique est restée constante à une valeur de référence dite préindustrielle de $x_0 = (280 \pm 10)$ ppm (280 ppm (280 parties par million) d'un gaz dans l'atmosphère signifie que la fraction molaire de ce gaz dans l'atmosphère est de $280/10^6$).

Depuis 1850 (et l'avènement de l'utilisation massive du charbon puis du pétrole et du gaz) la concentration atmosphérique en dioxyde de carbone augmente bien plus rapidement que ce qui a été jamais observé : elle a atteint $x_1 = 420$ ppm cette année. Ce phénomène est le principal responsable du dérèglement climatique observé.

Nous nous intéresserons dans cet exercice à l'aspect acide du dioxyde de carbone et à son effet sur les formes de vie marines. Les données nécessaires à la résolution des problèmes sont regroupées en fin d'exercice.

2.1 Acidité de l'eau « pure »

L'eau pure est le siège de la réaction d'autoprotolyse de l'eau de constante de réaction $K_e = 10^{-14}$ à 25°C.

1. Dresser un tableau d'avancement de la réaction.
2. Quel est le quotient de réaction initial du système ?
3. Calculer la concentration en ion oxonium à l'équilibre chimique.
4. En déduire le pH de l'eau pure.
5. Comment expliquer que l'eau pure est plus acide lorsque la température augmente ? On justifiera en précisant quel paramètre est affecté par la température.

2.2 Acidité de l'eau distillée

En pratique, l'eau distillée (dite injustement pure) est plus acide. Afin d'expliquer ce phénomène, il faut prendre en compte la dissolution du dioxyde de carbone dans l'eau et l'acidité de l'acide carbonique formé.

On donne pour cela la solubilité s en mol/L du dioxyde de carbone gazeux pur, dans l'eau à 25°C pour une pression en gaz maintenue égale à $P_{\text{atm}} = 1{,}0$ bar : $s = 3{,}8 \times 10^{-2}$ mol $\cdot$ L^{-1}.

La solubilité d'un gaz G correspond à la situation où l'équilibre chimique $G_{(g)} \leftrightarrows G_{(aq)}$ est réalisé.

6. Écrire l'équation de dissolution du dioxyde de carbone.
7. À partir des données, donner la constante d'équilibre K_1 de cette réaction.

Dans l'air, le dioxyde de carbone n'est pas pur, il est dilué dans l'atmosphère avec les autres gaz (dioxygène, diazote, etc.)

8. Exprimer la quantité de dioxyde de carbone dissous dans l'eau au contact de l'atmosphère en fonction de x, la fraction molaire en dioxyde de carbone dans l'atmosphère, de la pression atmosphérique P_{atm}, de K_1 et des concentrations et pressions standard $c°$ et $p°$.

Le dioxyde de carbone dissous dans l'eau forme l'acide carbonique $H_2CO_{3\,(aq)}$.

9. Faire un tableau d'avancement de la réaction de l'acide carbonique avec l'eau. Attention : **l'acide carbonique a une concentration à l'équilibre chimique fixée par l'équilibre précédent**. On considérera qu'il n'y a pas d'ions oxonium initialement.
10. Calculer l'avancement de cette réaction à l'équilibre.
11. En déduire le pH de l'eau laissée à l'air libre pour l'ère préindustrielle et pour l'époque moderne.

Le pH des océans était de 8,25 avant 1850 et est d'environ 8,14 maintenant.

12. Ce modèle est-il une bonne description de la réalité ?

2.3 Acidité d'une eau calcaire

On doit donc raffiner notre modèle. On considère désormais l'impact du calcaire. En effet, le calcaire est une roche assez commune qui est relativement soluble dans l'eau et qui est constitué de carbonate de calcium. En ajoutant une quantité massive d'ion carbonates dans l'eau, le calcaire est responsable de la basicité de l'océan.

On suppose toujours que l'océan est de l'eau distillée ayant solubilisé du dioxyde de carbone sous forme d'acide carbonique. La concentration d'acide carbonique dans l'eau est donc fixée à $C_1 = 1{,}08 \times 10^{-5}$ mol $\cdot$ L^{-1}. Cette concentration ne peut varier à cause de l'équilibre de dissolution du dioxyde de carbone gazeux.

Afin d'affiner le modèle, on va désormais supposer que cette eau contient aussi des ions carbonate et hydrogénocarbonates issus de la dissolution du calcaire. On cherche à vérifier si la dissolution du calcaire dans l'eau peut expliquer le pH de 8,25 observé à l'ère préindustrielle.

13. Déduire de la solubilité massique du calcaire dans l'eau pure son produit de solubilité (en négligeant tout aspect acido-basique).
14. Énoncer la relation de Hendersson-Hasselbalch pour un couple acido-basique $AH_{(aq)}/A^-_{(aq)}$.
15. En déduire les concentrations en ions hydrogénocarbonate et carbonate présents dans l'océan.
16. Tracer sans démonstration le diagramme de prédominance de la famille acido-basique de l'acide carbonique. En déduire sous quelle forme majoritaire se dissoudra le carbonate de calcium dans l'océan.
17. Quel acide est responsable de cet état de fait ?
18. Écrire l'équation-bilan traduisant alors la dissolution du carbonate de calcium. Déterminer sa constante d'équilibre.

19. Dresser le tableau d'avancement de cette réaction. Comparer le quotient de réaction à l'état final à la constante de réaction. La réaction a-t-elle atteint l'équilibre chimique ? Est-ce possible ?
20. En supposant que la concentration d'ions hydrogénocarbonate n'a pas varié depuis l'époque préindustrielle et que le pH est fixé par le couple acide carbonique / ion hydrogénocarbonate, quel serait le pH des océans à l'époque moderne ?

Données :

— $\mathrm{p}K_{\mathrm{A}1} = \mathrm{p}K_{\mathrm{A}}\left(\mathrm{H_2CO_3/HCO_3^-}\right) = 6{,}37$ et $\mathrm{p}K_{\mathrm{A}2} = \mathrm{p}K_{\mathrm{A}}\left(\mathrm{HCO_3^-/CO_3^{2-}}\right) = 10{,}3$;

— masse molaire du calcaire : $M_{\text{calcaire}} = 100\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$;

— solubilité massique du calcaire : $s_m = 14$ mg/L ;

— masse molaire du CO_2 : $M(CO_2) = 44\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$;

— température ambiante : 20°C ;

— constante de gaz parfaits : $R = 8{,}314\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$

Exercice 3 : Étagère

3.1 Fixation d'une étagère

On s'intéresse à deux façons de fixer une étagère sur un mur et aux conséquences que cela implique en termes d'efforts sur les mirs. L'étagère a une masse $m = 800$ g, est supposée homogène, a une profondeur $L = 30$ cm et une épaisseur $e = 2{,}0$ cm.

— Dans le cas de l'étagère PERSBY, l'étagère est fixée au mur par deux chevilles invisibles entre le mur et son dos comme le montre le schéma ci-dessous (à gauche). On supposera pour le calcul que les deux attaches sont situées exactement aux extrémités hautes et basses de l'étagère. L'attache du haut n'exerce qu'une force de traction (orthogonale au mur) tandis que l'attache du bas effectue le reste de la force (direction quelconque) nécessaire à l'équilibre de la tablette.

— Dans le cas d'une étagère standard, un fil de longueur $\ell = 50$ cm est attaché à une extrémité de l'étagère à un point en hauteur sur le mur comme le montre le schéma ci-dessous (à droite). L'attache du bas est identique.

Étagère PERSBY — Étagère standard

On note $\overrightarrow{F_b}$ la force exercée par l'attache du bas sur la tablette et $\overrightarrow{F_h}$ celle exercée par l'attache du haut. L'axe vertical sera l'axe z orienté vers le haut et l'axe y orthogonal au mur vers la pièce. On note B et H les points d'attache de l'étagère respectivement en bas et en haut.

1. À l'aide du TRC et du TMC, déterminer les deux forces dans le cas de l'étagère PERSBY. On donnera les deux composantes de $\overrightarrow{F_b}$.
2. De même, déterminer les deux forces dans le cas de l'étagère standard. On donnera les deux composantes de $\overrightarrow{F_b}$.
3. Comparer l'intensité des forces entre les deux systèmes de fixation et conclure quelle étagère est la plus adaptée pour porter des charges lourdes.

3.2 Rupture d'une fixation

On considère la rupture de la fixation du haut sur n'importe lequel de ces deux modèles (ce qui en pratique arrive quand une des chevilles cède). On suppose que la vis du bas se tord et se comporte comme une liaison pivot parfaite. Afin de s'implifier l'étude, on assimile l'étagère à une tige de longueur L (on néglige l'effet de l'épaisseur de l'étagère).

4. Quel va être le mouvement de l'étagère à partir du moment de la rupture de la fixation ?
5. Établir l'équation du mouvement. On choisira l'angle θ entre l'horizontale et l'étagère ainsi qu'un référentiel adapté pour que cet angle augmente lors de la chute.
6. Démontrer l'expression suivante à partir de l'équation du mouvement :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}}\sqrt{\sin\theta}$$

7. En déduire le temps que met l'étagère pour basculer à la verticale.

Données :

— Moment d'inertie d'une tige homogène de longueur L et de masse m par rapport à son extrémité $J = \frac{1}{3}mL^2$;

— Intégrale :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} \mathrm{d}x = 2{,}62$$

— Accélération de la pesanteur $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.