DS n°6

samedi 08 février 2025

MPSI1 & 2 – 2024/2025

Consignes

- ▷ L'usage de la calculatrice est **autorisé**.
- ▷ Répondez aux exercices que vous pensez savoir traiter en premier. Signalez clairement lorsque vous changez d'exercice. Prenez le temps de bien lire les questions. Les exercices sont indépendants.
- ▷ La notation sera particulièrement sensible à la précision et à la clarté des arguments. En particulier, et sauf si la question le demande explicitement, **les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte**.
- ▷ **La qualité de la rédaction et le soin** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. La réponse à une question prend la forme d'une **formule littérale encadrée** ou soulignée. L'application numérique (avec la bonne unité et le bon nombre de chiffres signficatifs) doit être réalisée ensuite.
- ▷ Bon courage !

Exercice 1 : Réduction des ions peroxodisulfate par les ions iodure

1.1 Dimensions et unités des constantes de vitesse

On considère une réaction chimique $A \longrightarrow B + C$, d'ordre partiel m par rapport à l'unique réactif A :

$$v = k\,[A]^m$$

1. Déterminer la dimension de la constante de vitesse k pour $m = 0$, $m = 1$ et $m = 2$. En déduire les unités correspondantes dans le système international, et les unités usuelles en chimie.
2. Donner les expressions des temps de demi-réaction pour chacun de ces ordres. Vérifier que les expressions obtenues sont homogènes.

1.2 Étude de la réaction

Alice et Bob étudient la cinétique à 25°C de la réaction suivante, supposée quantitative :

$$S_2O^{2-}_{8\,(aq)} + 2\,I^-_{(aq)} \longrightarrow 2\,SO^{2-}_{4\,(aq)} + I_{2\,(aq)}$$

Ils font l'hypothèse que cette réaction admet un ordre, et notent α l'ordre partiel par rapport à $S_2O_8^{2-}$, β l'ordre partiel par rapport à I^- et k la constante cinétique.

3. Écrire la loi de vitesse de la réaction.

Le diiode $I_{2\,(aq)}$ étant la seule espèce colorée (brun-orangée) présente dans le milieu réactionnel, on retient une méthode de suivi spectrophotométrique. Alice choisit de travailler à la longueur d'onde $\lambda = 454$ nm.

4. Pourquoi a-t-elle choisi cette longueur d'onde ?
5. Quelle loi affirme la proportionnalité entre absorbance et concentration d'une espèce colorée ? On notera p le facteur de proportionnalité entre l'absorbance et la concentration de I_2. Donner l'expression littérale de p.

La figure 1 représente la droite d'étalonnage qu'Alice a obtenu expérimentalement en traçant l'absorbance A d'une solution de diiode en fonction de sa concentration en solution, à la longueur d'onde $\lambda = 454$ nm.

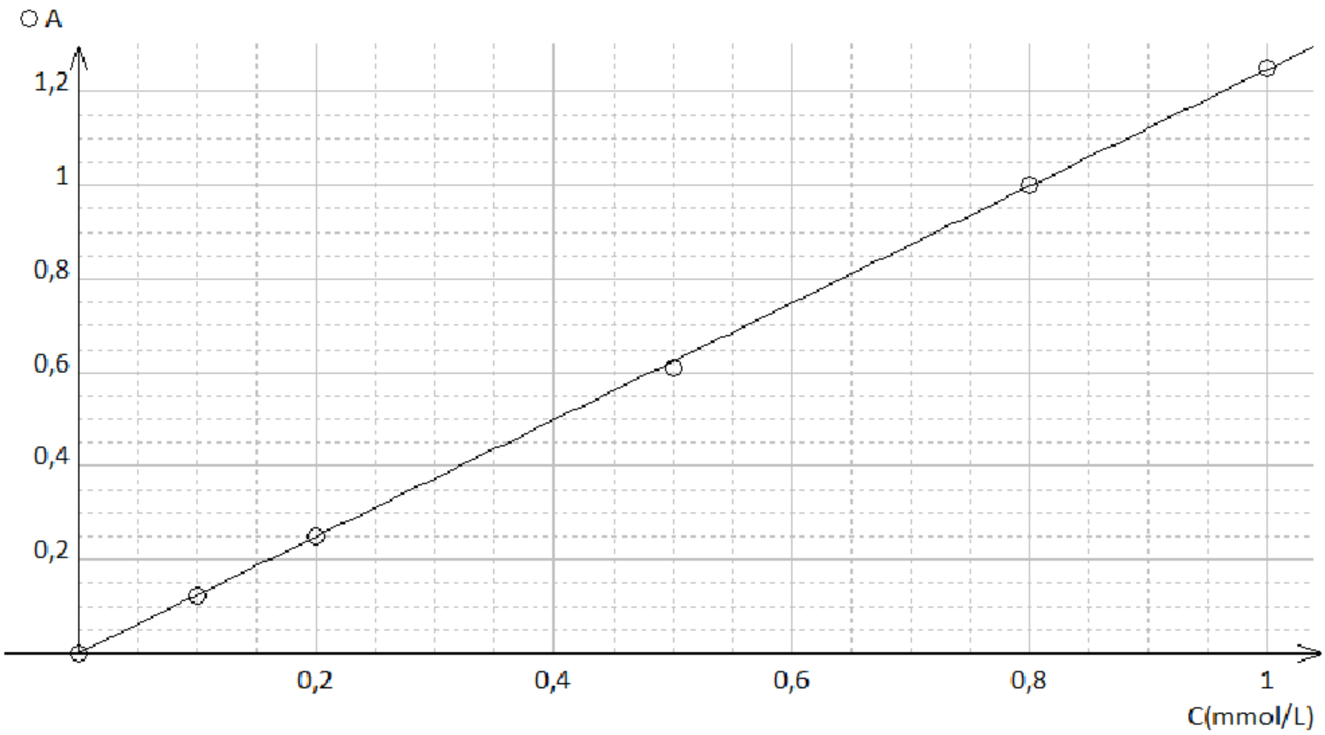
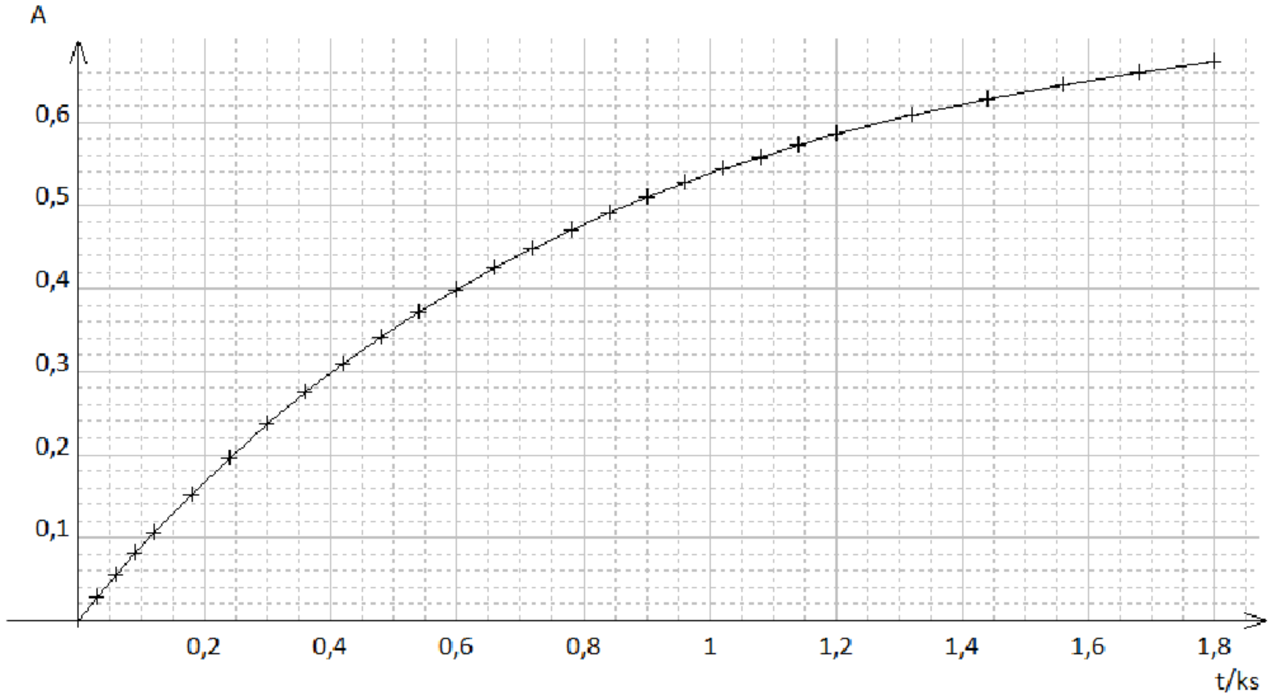


Figure 1 – Courbe d'absorbance A en fonction de $C = [I_2]$ (exprimée en $\mathrm{mmol \cdot L^{-1}}$).

6. En déduire la valeur numérique du coefficient directeur p.

Pour étudier la cinétique de la réaction, Bob mélange pendant ce temps-là un volume $V_1 = 20$ mL d'une solution de peroxodisulfate de sodium $\left(2\,Na^+ ; S_2O_8^{2-}\right)$ à $C_1 = 1{,}0 \times 10^{-1}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ avec un volume $V_2 = 30$ mL d'une solution de iodure de potassium $\left(K^+ ; I^-\right)$ à $C_2 = 2{,}0 \times 10^{-3}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$. Il mesure l'absorbance au cours du temps, et représente ses résultats sur la figure 2.

7. Calculez C_a la concentration initiale en ions peroxodisulfate et C_b la concentration initiale en ions iodure.
8. Montrer que l'on peut alors simplifier la loi de vitesse. On justifiera soigneusement. Quel est le nom de cette méthode expérimentale ? À quel(s) paramètre(s) de la loi de vitesse nous permet-elle d'accéder ?



t (ks)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
A	0,0	0,169	0,301	0,402	0,481	0,541	0,589	0,625	0,653	0,675	0,692

Figure 2 – Absorbance du milieu réactionnel au cours du temps (exprimé en ks).

9. Démontrer, à l'aide d'un tableau d'avancement, que :

$$\left[\mathrm{I}^-\right] = C_b - \frac{2A}{p}$$

10. En déduire sur votre calculatrice, à l'aide du tableau de la figure 2, le tableau donnant l'évolution de $\left[\mathrm{I}^-\right]$ au cours du temps. **Pour ne pas perdre trop de temps, vous n'indiquerez sur votre copie que la concentration à $t = 0$, 0,6, 1,4 et 2,0 ks.**

    On fait l'hypothèse $\beta = 1$.

11. À partir de la loi de vitesse, établir l'équation différentielle vérifiée par $\left[\mathrm{I}^-\right]$.
12. Démontrer, en résolvant l'équation différentielle, que

$$\ln\left(\left[\mathrm{I}^-\right]\right) = \ln\left(C_b\right) - 2k_{\text{app}}t$$

13. En effectuant la régression linéaire $\ln\left(\left[\mathrm{I}^-\right]\right) = f(t)$ à la calculatrice, déterminer la valeur de la constante de vitesse apparente k_{app}. Quel est le nom de cette méthode ?

La deuxième expérience est faite en mélangeant $V_3 = 20$ mL d'une solution de peroxodisulfate de sodium $\left(2\,\mathrm{Na}^+ ; \mathrm{S_2O_8^{2-}}\right)$ à $C_3 = 2{,}0 \times 10^{-3}$ mol · L^{-1} avec un volume $V_2 = 30$ mL d'une solution de iodure de potassium $\left(\mathrm{K}^+ ; \mathrm{I}^-\right)$ à $C_4 = 1{,}0 \times 10^{-1}$ mol · L^{-1}. $\left[\mathrm{S_2O_8^{2-}}\right]$ est obtenu à partir de $A(t)$ de la même façon que dans la partie précédente. Cette fois, ils sont passé par une autre méthode pour déterminer la constante de vitesse apparente et l'ordre mais ils ne se rappellent plus laquelle...

14. Rappeler le nom de la méthode qu'ils ont utilisé en étudiant la capture d'écran de leur TP (figure 3).

15. En déduire l'ordre α et la constante de vitesse k'_{app} (dont on rappellera l'expression).
16. Conclure en déterminant la constante de vitesse k de la réaction. Vérifier la cohérence des deux expériences.

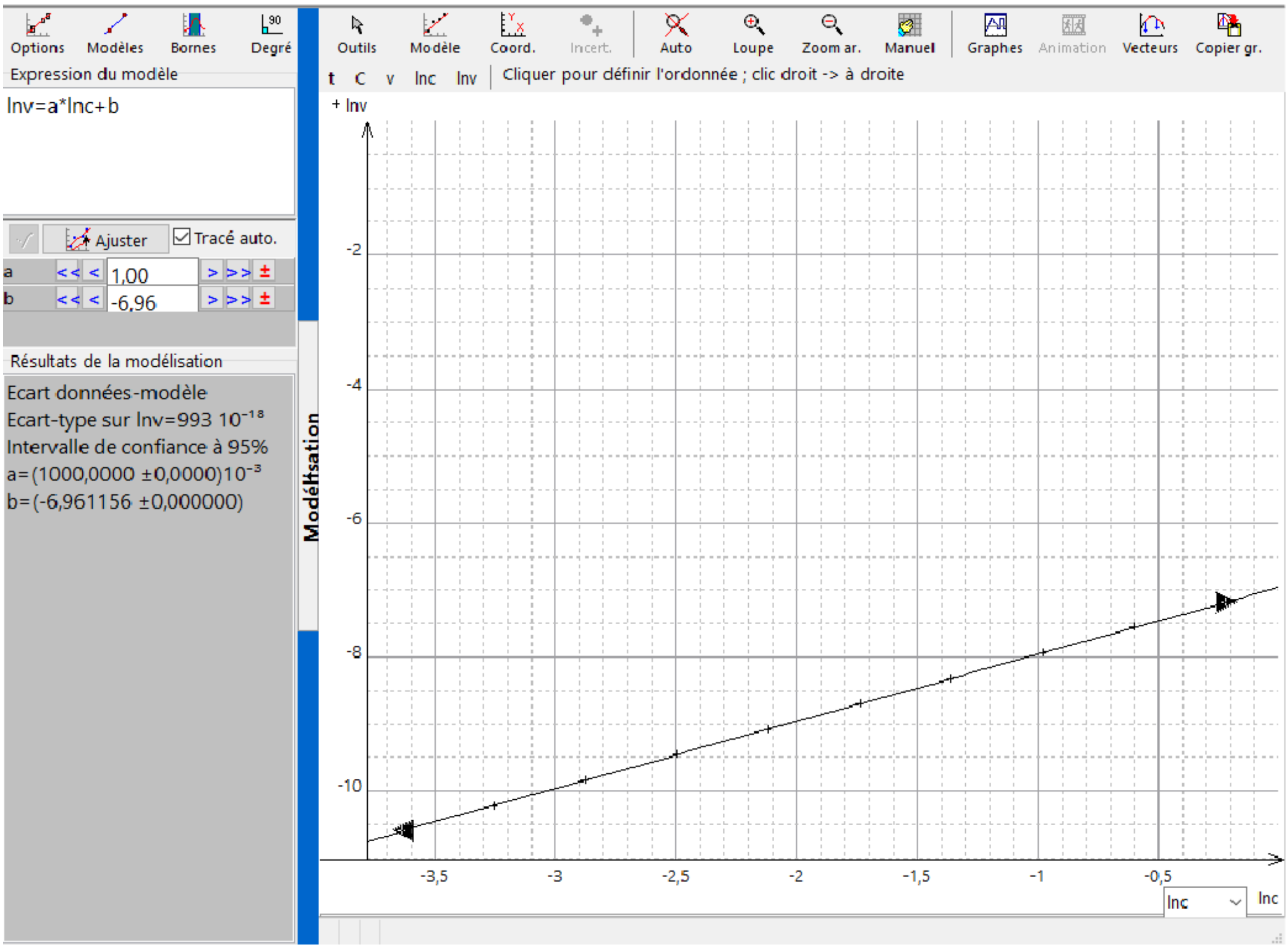


Figure 3 – La capture d'écran d'Alice et Bob. On a $\ln(v) = 1{,}00 \times \ln(c) - 6{,}96$.

L'attaque des titans

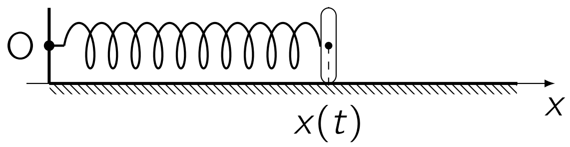
Dans l'anime *L'attaque des titans*, les humains affrontent des monstres humanoïdes de grande taille (de quelques mètres à 20 m) mangeurs d'hommes : les Titans. La bataille est très inégale, car l'humanité a un niveau technologique similaire à celui de la renaissance en occident : premiers canons, fusils mais seules les armes blanches sont assez puissantes pour tuer les Titans : il faut leur trancher la nuque. Les être humains sont alors contrains de se réfugier dans une ville fortifiée par un ensemble de 3 murs concentriques : les murs Sina, Rose puis Maria.

La partie mécanique de ce sujet s'inspire de cet anime. Bien sûr, aucune connaissance de l'anime n'est nécessaire pour résoudre les différents problèmes.

Exercice 2 : À l'académie de formation

Parce qu'un cadet qui veut avoir la moindre chance de survie se doit de maîtriser les bases de la mécanique.

1. Un objet ponctuel de masse m est lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h. Il tombe sans frottement.
   (a) Exprimer le travail élémentaire du poids, puis le travail sur toute la chute en fonction de la hauteur h en particulier. En déduire l'énergie potentielle du poids.
   (b) Conclure sur la vitesse atteinte par l'objet après une chute d'une hauteur de $h = 10m$.
2. On étudie un oscillateur harmonique horizontal sur coussin d'air, si bien que l'on peut négliger les frottements sur quelques oscillations. L'origine du repère cartésien est placée au point d'attache du ressort, si bien que la longueur du ressort est égale à $x(t)$.



   (a) Démontrer le théorème de la puissance cinétique.
   (b) Faire le bilan des forces, refaire et compléter le schéma.
   (c) Calculer la puissance des différentes forces.
   (d) Démontrer en utilisant le théorème de la puissance cinétique que :

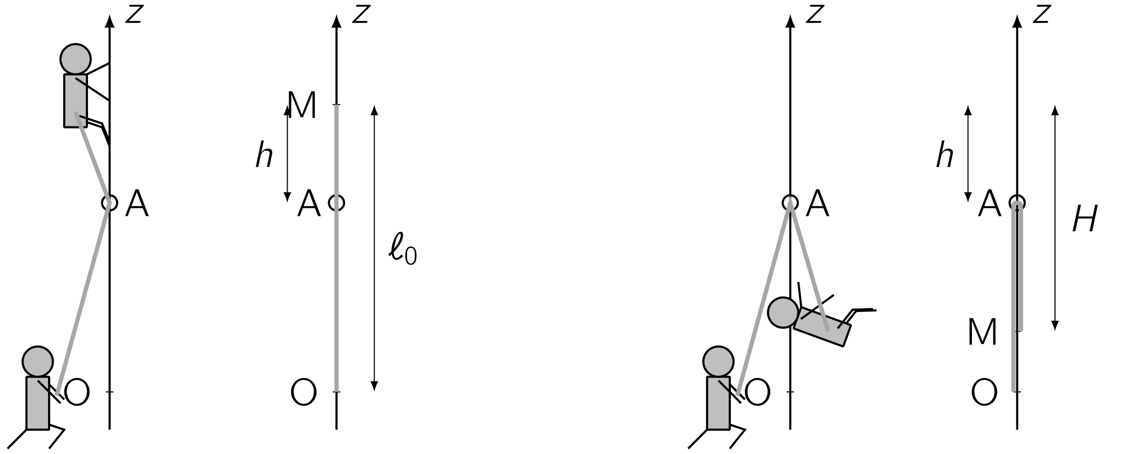
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_0$$

Exercice 3 : Escalade à l'entrainement

Les membres du bataillon d'exploration se doivent de suivre un entraînement particulièrement rigoureux afin de pouvoir utiliser l'équipement tridimensionnel (qui sera présenté à l'exercice suivant). Dans le cadre de cet entraînement, ils pratiquent l'escalade. Afin d'éviter de perdre des membres prometteurs en formation, l'état-major leur ordonne de s'assurer lors de ces sessions : le grimpeur doit accrocher des anneaux à la paroi au fur et à mesure de son ascension et doit être assuré par un compagnon au sol qui maintient la corde tendue lors de l'ascension. Ainsi, s'il tombe, il ne chutera pas jusqu'au sol comme le montre les deux situations de la figure ci-contre.

Comme placer ces anneaux prend du temps, on cherche à déterminer la hauteur maximale h_{max} qu'il est possible de grimper entre un anneau et le suivant tout en maintenant un niveau de sécurité acceptable en cas de chute.

Le critère de danger est la force maximale exercée par la corde sur le grimpeur lorsque ce dernier chute et que la corde se retend brutalement (situation 2). Cette force limite de danger vaut $F_d = 12$ kN. Si la force exercée par la corde sur le grimpeur dépasse ce seuil, celui-ci risque de se casser le bassin ou le dos.



Modélisation
Situation 1

Modélisation
Situation 2

Afin d'estimer précisément la force exercée par la corde sur le grimpeur, il est nécessaire de prendre en compte son élasticité (si la corde était un fil inextensible, la chute s'arrêterait instantanément, ce qui impliquerait une force infinie). On modélise donc la corde par un élastique de constante de raideur k. On exprime k en fonction du module d'Young E du matériau et de la section S de la corde ainsi : $k = ES/\ell_0$, où ℓ_0 est la longueur à vide de la corde.

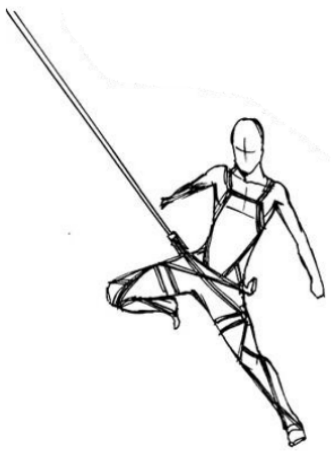
On considère ici la situation suivante : alors qu'il est arrivé à une hauteur h au-dessus de l'anneau A, et que la corde est à la limite d'être tendue (sa longueur est sa longueur à vide), le grimpeur, initialement immobile, chute d'une hauteur $H = 2h+a$, où a est l'allongement de la corde par rapport à la situation précédente. Il est alors soumis, de la part de la corde, à une force de rappel F_{max} en ce point d'altitude minimale. **On supposera le mouvement entièrement vertical** (contrairement à ce que montrent les dessins de gauche sur la figure ci-dessus). On néglige tout frottement dans la modélisation et on suppose que le compagnon au sol est un simple point de fixation immobile.

Le référentiel est fixé par le schéma et on note $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ la norme de l'accélération de la pesanteur.

1. Exprimer l'énergie mécanique du grimpeur au début de sa chute, après avoir quitté la paroi (situation 1) puis quand il arrive à son altitude minimale (situation 2) en fonction des données du problème m, g, ℓ_0, k, h et a.
2. En déduire une équation du second degré vérifiée par a.
3. Montrer que la valeur F_{max} de la force exercée par la corde après une chute est :
$$F_{max} = mg\left(1 + \sqrt{1 + 2f\frac{ES}{mg}}\right)$$
On déterminera l'expression de f appelé facteur de chute en fonction de h et ℓ_0.
4. La longueur à vide de la corde est $\ell_0 = 15$ m, $h = 2{,}0$ m et le fabricant donne pour la corde utilisée de diamètre 10 mm la valeur $ES = 21{,}1 \times 10^3$ N. En déduire les valeur de F_{max} et de a. Quelle est l'allongement relatif de la corde ?
5. Le grimpeur court-il un danger ?

6. Quelle est la situation la plus dangereuse entre la configuration précédente et une chute d'une hauteur de 1,0 m depuis une altitude de 3,0 m par rapport au sol ?

Exercice 4 : L'équipement tridimensionnel



Dans l'anime, un bataillon d'humains, le bataillon d'exploration, cherche à sortir des murs pour découvrir le monde extérieur. Ils doivent pour cela affronter les Titans. Ils développent dans ce but un équipement appelé l'équipement tridimensionnel. Il s'agit d'un harnais auquel sont fixés des grappins que l'utilisateur peut projeter pour s'agripper à différentes structures (arbres d'une forêt ou bâtiments par exemple).

On se propose d'étudier plusieurs aspects du mouvement d'un utilisateur utilisant cet équipement.

La deuxième partie est indépendante de la première partie. Dans tout l'exercice, on notera $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ l'accélération de la pesanteur.

4.1 Une petite traversée

Cette partie est une résolution de problème : on veillera à introduire des notations pour effectuer un calcul littéral, à faire un schéma et une description précise de la situation. Chaque hypothèse faite devra être introduite explicitement.

Pour commencer, le combattant (dont la masse équipement compris est de 80 kg) doit traverser un petit ruisseau de deux mètres de large en restant en l'air. Il utilise pour cela son équipement en s'accrochant à une branche d'arbre située 15 mètres au-dessus du ruisseau, et à la verticale du milieu du ruisseau. Il démarre sa traversée immobile et son filin sera de longueur constante durant la traversée.

1. Quelle doit être sa hauteur minimale de départ pour ne pas toucher l'eau lors de sa traversée ?
2. Dans ce cas, combien de temps prendra sa traversée ?

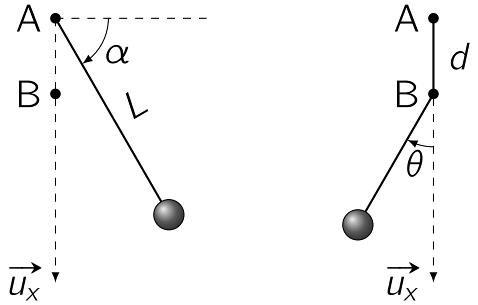
4.2 L'attaque du Titan féminin

On considère désormais le scénario suivant qui se déroule pendant la bataille contre le titan féminin. Les membres du bataillon ont réussi à l'attirer dans une forêt d'arbres géants afin de pouvoir mieux manœuvrer en accrochant leurs grappins aux arbres et donc de pouvoir lui trancher la nuque plus facilement. Lors du combat, un des combattants, que l'on appellera Bob, accroche son grappin sur un arbre en face de lui : le point A. Il se laisse alors tomber sans vitesse initiale de l'horizontale pour attaquer le titan féminin. Malheureusement celle-ci place son bras en B afin d'intercepter son filin. Le but de l'exercice consista à déterminer la condition sur d

pour que le filin reste tendu tout au long du mouvement (et donc que Bob ne se retrouve pas en chute libre). Les angles α et θ sont définis sur le schéma.

On suppose encore que la longueur du filin, L, est constante et que le bras B est immobile lors du mouvement afin de simplifier l'étude. Enfin, on suppose qu'il n'y a pas de transfert d'énergie lorsque le filin entre en contact avec le bras : la vitesse de Bob est donc conservée lorsque son filin entre en contact avec le bras B du titan féminin.

Le mouvement est donc constitué de deux phases que nous allons étudier séparément. Dans la première phase, on a un pendule simple de longueur L et dans la seconde, un pendule de longueur $L - d$.



3. Montrer que quand $\alpha = \pi/2$, la vitesse angulaire est :

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

4. Reproduire le schéma ci-dessus à droite. Dessiner en pointillés la trajectoire suivie par M après l'impact du filin sur B.
5. Le fait que le fil s'enroule autour du clou ne s'accompagne d'aucun transfert d'énergie. En déduire la vitesse de l'humain pour $\theta = 0$. En déduire que, pour $\theta = 0$:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{L-d}\sqrt{\frac{2g}{L}}$$

6. Dans la seconde phase, exprimer T en fonction de m, L, d, $\dot{\theta}$, g et θ.
7. Démontrer que :

$$m\left(L-d\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2} = mg\cos\theta + mg\frac{d}{L-d}$$

8. En déduire l'expression de T en fonction de m, L, d, g et θ.
9. Conclure : donner la condition sur d pour que le fil reste tendu tout au long du mouvement.