DS n ° 4

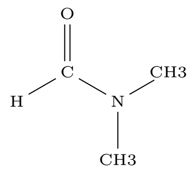
samedi 7 décembre 2024
MPSI1 & 2 – 2023/2024

Consignes

- ▷ L'usage de la calculatrice est **autorisé**.
- ▷ Répondez aux exercices que vous pensez savoir traiter en premier. Signalez clairement lorsque vous changez d'exercice. Prenez le temps de bien lire les questions. Les trois exercices sont indépendants.
- ▷ La notation sera particulièrement sensible à la précision et à la clarté des arguments. En particulier, et sauf si la question le demande explicitement, **les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte**.
- ▷ **La qualité de la rédaction et le soin** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. La réponse à une question prend la forme d'une **formule littérale encadrée** ou soulignée. L'application numérique (avec la bonne unité et le bon nombre de chiffres signficatifs) doit être réalisée ensuite.
- ▷ Bon courage !

Exercice 1 : Étude de quelques solvants

On étudie les solvants suivants :

Solvant	Eau	Méthanol (CH_3OH)	Éthanol	DMF : 
Température d'ébullition sous 1 bar	100°C	65°C	79°C	153°C

1. Préciser si les solvants du tableau sont protiques ou aprotiques, polaires ou apolaires.
2. Expliquer la différence de température d'ébullition entre le méthanol et l'éthanol.
3. On donne les températures des homologues soufrés de l'eau, du méthanol et de l'éthanol (le soufre est placé sous l'oxygène dans la classification périodique).

Solvant	H_2S	Méthanethiol	Éthanethiol
Température d'ébullition sous 1 bar (°C)	−65	6	35

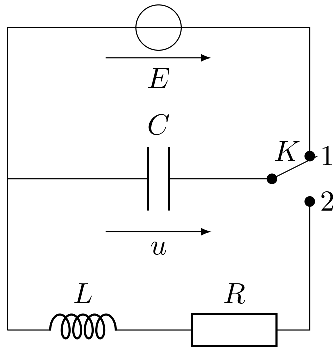
   (a) On rappelle que le numéro atomique de l'oxygène est 8. Déterminer la configuration électronique de l'oxygène dans son état fondamental.
   (b) En déduire celle du soufre.
   (c) Proposer une représentation de Lewis pour le méthanethiol et l'éthanethiol. Représenter d'éventuelles charges partielles.
   (d) Comparer les températures d'ébullitions de l'eau et des alcools étudiés à celles de leurs homologues soufrés en expliquant les différences observées.

4. Donner une formule de Lewis de H_2S, SO_2 et SO_3.
5. Les deux premières sont coudées tandis que la dernière est trigonale plane (il y a un angle de 120° entre chaque liaison). Pour chacune des molécules, déterminer l'orientation d'un éventuel moment dipolaire et le représenter.
6. Justifier pourquoi le sulfure d'hydrogène est plus soluble dans l'eau de que dioxyde de soufre.

Exercice 2 : Capteur d'hygrométrie (CAPES interne 2010)

Pour tenir compte de la présence de vapeur d'eau dans l'air, on mesure H, l'humidité relative à la température T : cette grandeur est exprimée en % et est le rapport entre la pression partielle en vapeur d'eau effective et la pression de vapeur saturante (la pression partielle en vapeur d'eau à l'équilibre chimique entre l'eau liquide et l'eau vapeur). Dans cet exercice, on étudie un capteur d'humidité constitué d'un condensateur dont la capacité varie avec l'humidité.

On se place dans le circuit ci-contre, comprenant un générateur de tension continue de force électromotrice E et de résistance interne nulle, une bobine d'inductance L, une résistance R modélisant la résistance totale du circuit et le condensateur de capacité C étudié.



1. L'interrupteur K est d'abord placé dans la position 1. Combien vaut la tension u aux bornes du condensateur ?
2. À l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur dans la position 2. Montrer quer l'équation différentielle à laquelle satisfait la tension $u(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$$

   Donner les expressions de ω_0 et λ en fonction de R, L et C.
3. On se place en régime pseudo-périodique. Montrer que cela n'est possible que pour des valeurs de résistance telles que $R < R_c$, avec R_c une valeur limite à déterminer.
4. La tension $u(t)$ est-elle continue en 0^+ ? Qu'en est-il de sa dérivée temporelle ? Déterminer leur valeur à $t = 0^+$.
5. Résoudre l'équation différentielle : exprimer $u(t)$ en fonction de E, λ, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ et t.
6. On se place dans le cas où $R = 0$. Que devient l'équation différentielle et quelle est la nouvelle expression de $u(t)$? Donner l'expression de la période propre T_0 du circuit.
7. Montrer que si la résistance R est très inférieure à R_c, alors la période des oscillations observées est très proche de T_0. En présence d'humidité dans l'air, on mesure $T_0 = 27{,}2\ \mu$s. Sachant que l'inductance de la bobine est $L = 150$ mH, calculer la capacité C du condensateur.
8. On peut lire sur la notice les indications suivantes :
   — gamme de mesures : 10% à 90% d'humidité relative ;
   — sensibilité : C augmente de 0,40 pF par % d'humidité relative ;
   — capacité : $C = 123$ pF pour $H = 40\%$.
   La capacité est reliée linéairement à l'humidité relative : $C = aH + b$. Déterminer l'humidité relative de l'atmosphère lors de la mesure précédente.

Exercice 3 : Étude d'un aspirateur

On s'intéresse dans ce problème à la modélisation électrique d'un aspirateur domestique. Dans un premier temps, nous étudierons les régimes transitoires subis par l'aspirateur afin de vérifier les ordres de grandeurs de temps d'allumage. Puis nous nous intéresserons au fonctionnement de l'aspirateur branché au réseau domestique. Enfin nous nous pencherons sur l'apparition d'une étincelle de rupture lorsque l'on débranche brusquement l'aspirateur alors qu'il fonctionnait.

3.1 Un premier modèle d'aspirateur

On modélise dans cette partie l'aspirateur comme un circuit RL, les valeurs de R et de L étant la résistance interne du moteur et son inductance. On prend dans cette partie $R = 5\ \Omega$ et $L = 100$ mH.

Aspirateur fonctionnant sur tension continue. On s'intéresse dans un premier temps à l'établissement du courant dans l'aspirateur. On suppose pour cela, que l'aspirateur est connecté à l'instant $t = 0$ à une source de tension continue de valeur $E = 230$ V.

1. Faire un schéma du circuit électrique (en modélisant par un interrupteur la prise de l'aspirateur que l'on branche à $t = 0$).
2. Donner l'expression du courant traversant l'aspirateur au cours du temps.
3. Au bout de combien de temps peut-on considérer le régime permanent atteint ? On donnera une expression littérale puis l'application numérique.
4. Quel est en régime permanent le courant traversant l'aspirateur et la puissance consommée par l'aspirateur ? Comparer aux ordres de grandeurs usuels.
5. Quelle sera l'énergie stockée sous forme magnétique par la bobine ?
6. (difficile) Au bout de combien de temps l'énergie stockée par la bobine devient-elle négligeable devant l'énergie dissipée par la résistance (10 fois plus petite) ?

Aspirateur en courant alternatif On constate que l'on ne peut pas faire l'économie d'une étude en régime sinusoïdal de l'appareil. On suppose donc désormais que l'aspirateur est branché sur une prise domestique usuelle délivrant une tension efficace de $E_{\text{eff}} = 230$ V à une fréquence de 50 Hz. On admettra que l'amplitude A est reliée à la valeur efficace A_{eff} par $A = A_{\text{eff}}\sqrt{2}$.

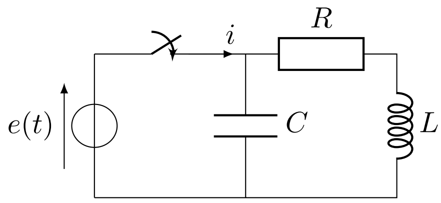
7. Écrire le signal réel $e(t)$ associé au générateur. On prendra grand soin de préciser les valeurs de l'amplitude et de la pulsation de ce signal. On choisira sa phase à l'origine nulle.
8. En quoi l'équation différentielle régissant le fonctionnement du circuit est-elle modifiée ?
9. Sa solution homogène est-elle modifiée ?
10. Expliquer pourquoi on peut dans la pratique ne s'intéresser qu'au régime permanent sinusoïdal atteint.
11. Donner l'expression du signal complexe $\underline{e}(t)$.
12. Calculer l'amplitude complexe du courant traversant l'aspirateur. En déduire l'amplitude réelle et la phase.
13. En déduire l'expression de $i(t)$.
14. (MPSI1 uniquement) Montrer que la puissance moyenne reçue par l'aspirateur peut s'exprimer comme $\langle P\rangle = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi$, où I_{eff} désigne la valeur efficace du courant traversant l'aspirateur et φ le déphasage entre le courant et la tension.
15. Calculer alors la puissance moyenne reçue par l'aspirateur. Celle-ci est-elle plus conforme aux ordres de grandeurs usuels ?
16. Que se passerait-t-il si l'on modifiait la fréquence du réseau électrique domestique ? On discutera les limites hautes et basses fréquences.
17. Quel dipôle consomme réellement cette puissance ? La réponse n'appelle pas de lourds calculs.

Débranchement de l'aspirateur On se place à un instant où $i(t)$ n'est pas nul, on choisit cet instant comme nouvelle origine des temps. On débranche alors brutalement l'aspirateur.

18. En étudiant rapidement le circuit à $t = 0^-$ et $t = 0^+$, montrer qu'une contradiction apparait. On modélisera le fait de débrancher la prise par l'ouverture d'un interrupteur en série du générateur.

3.2 Un modèle plus élaboré d'aspirateur

On décide dans ce modèle de prendre en compte la capacité parasite de la prise. En effet, lorsque l'aspirateur est débranché, la prise comporte deux tiges métalliques se faisant face qui vont jouer le rôle du condensateur. On estime la valeur de C à environ 10 pF.



19. Expliquer en quoi l'introduction de ce condensateur résout le problème rencontré à la question précédente.

20. Quelle est la valeur numérique de la norme de l'impédance du condensateur ?
21. Expliquer alors rapidement en quoi l'ajout du condensateur ne modifie pas significativement les résultats de l'étude précédente. On peut argumenter sur l'impédance équivalente de l'aspirateur dans cette configuration.

3.3 Étude de la formation d'une étincelle de rupture

On constate que lorsque l'on débranche brutalement l'aspirateur alors qu'il fonctionnait, il peut se former une étincelle dite « de rupture ». Cette étincelle passe d'une tige métallique de la prise à l'autre. Dans notre modèle, il s'agit d'une quantité de charge qui traverse le condensateur.

On constate expérimentalement que ces étincelles se forment spontanément si la tension entre les deux tiges de la prise (donc aux bornes du condensateur) dépasse une tension de seuil $U_s = 2000$ V. Nous souhaitons donc nous intéresser au régime transitoire obtenu lorsque l'on débranche l'aspirateur.

On considère de nouveau dans cette partie, et ce pour simplifier l'étude, que le générateur de tension délivre une tension continue $E = 230$ V.

On souhaite étudier la tension u_c aux bornes du condensateur au cours du temps afin de savoir si cette tension va dépasser 2000 V et quand. On flèche u_c vers le bas.

Les conditions de l'étude sont les suivantes : on suppose que l'aspirateur est branché depuis longtemps. À $t = 0$, on débranche l'aspirateur (on ouvre l'interrupteur du circuit).

Étude générale du régime transitoire

22. Montrer que $u_C\left(0^-\right) = -E$. En déduire $u_C\left(0^+\right)$.
23. Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\left(0^+\right) = \dfrac{E}{RC}$
24. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de u_C dans le circuit.
25. Écrire l'équation différentielle sous forme normalisée, identifier le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0.
26. Résoudre cette équation différentielle.

Applications numériques et approximations

27. Montrer que $Q \gg 1$. En déduire que
$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0$$
28. À l'aide des valeurs numériques des différents termes, montrer que l'on peut approximer $u_C(t)$ ainsi :
$$u_C(t) \approx QE\sin\left(\omega_0 t\right)\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$
29. Montrer que :
$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) \approx QE\omega_0\cos\left(\omega_0 t\right)\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$
30. En déduire le temps t_m pour lequel u_C atteint son premier maximum.
31. En déduire que $u_C\left(t_m\right) \approx QE$.
32. Justifier l'apparition d'une étincelle de rupture. Dans quel intervalle de temps se produit-elle ? Les puristes pourront avec profit invoquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Finissons le calcul :

33. Montrer que le temps t_i de formation de l'étincelle vérifie l'équation approximative $QE\sin\left(\omega_0 t_i\right) = U_s$. En déduire la valeur de t_i.
34. Quelle est la charge stockée dans le condensateur lors de la formation de l'étincelle ?
35. Quelle est l'énergie de l'étincelle ? Cela vous parait-il dangereux ?
36. À l'aide d'un raisonnement énergétique (que l'on détaillera), montrer que l'on pouvait prévoir l'apparition de l'étincelle de rupture sans calculs lourds.