

DS n° 2

samedi 12 octobre 2024
MPSI1 & 2 – 2024/2025

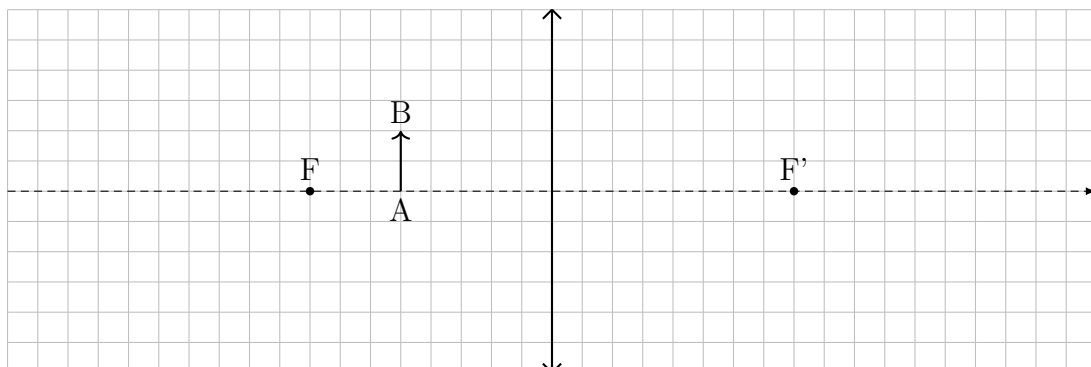
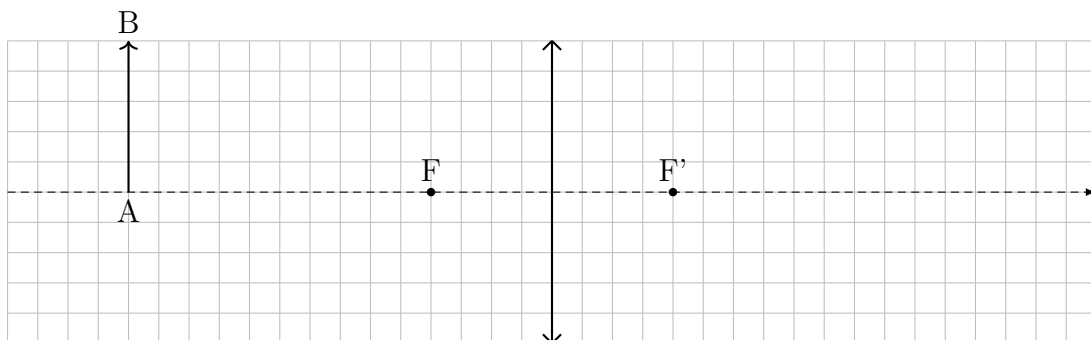
Consignes

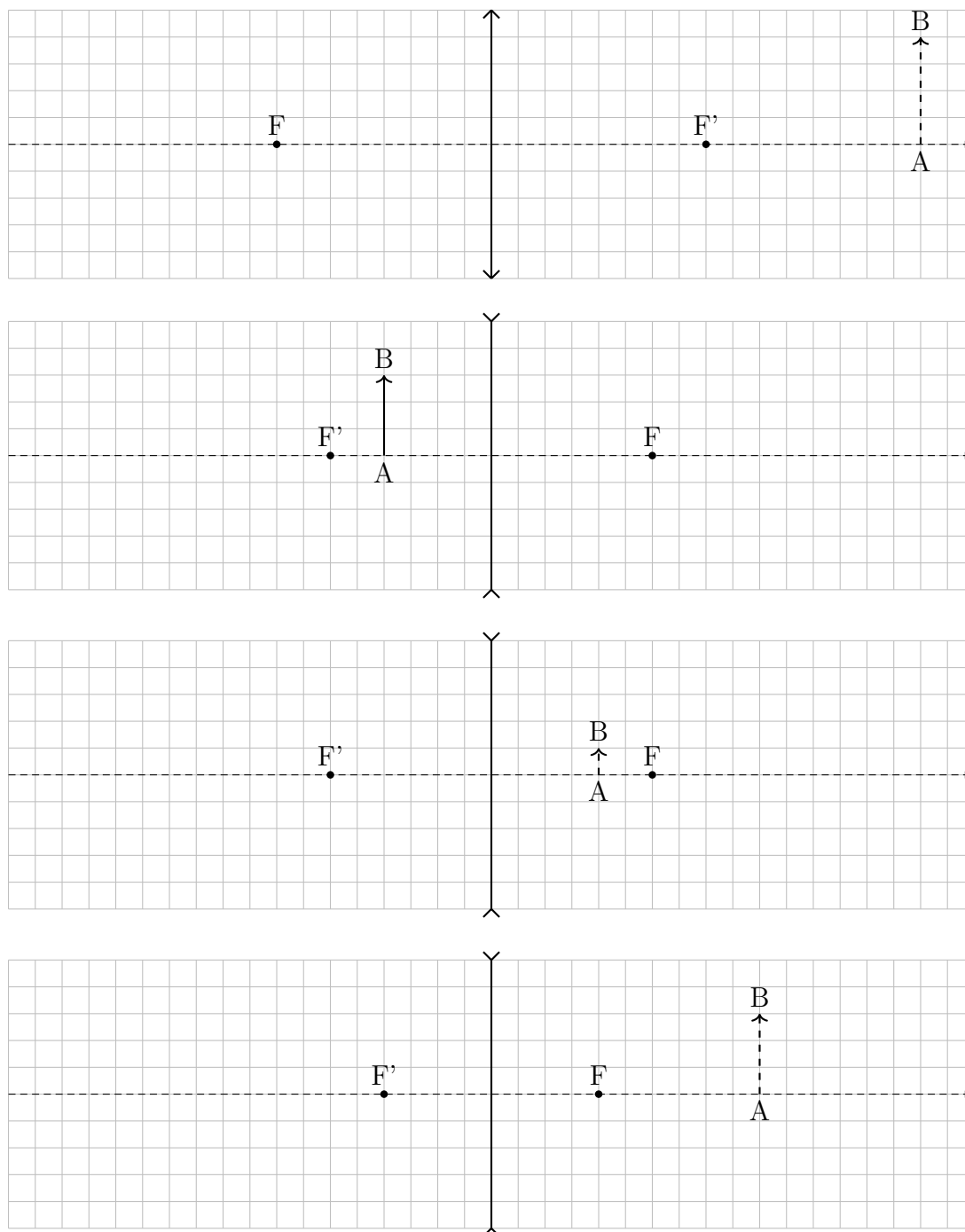
- ▷ L'usage de la calculatrice est **autorisé**.
- ▷ Répondez aux exercices que vous pensez savoir traiter en premier. Signalez clairement lorsque vous changez d'exercice. Prenez le temps de bien lire les questions. Les quatre exercices sont indépendants.
- ▷ La notation sera particulièrement sensible à la précision et à la clarté des arguments. En particulier, et sauf si la question le demande explicitement, **les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte**.
- ▷ **La qualité de la rédaction et le soin** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. La réponse à une question prend la forme d'une **formule littérale encadrée** ou soulignée. L'application numérique (avec la bonne unité et le bon nombre de chiffres significatifs) doit être réalisée ensuite.
- ▷ Bon courage !

1 Construction optiques

Construire, en respectant les conventions de tracé, les images des objets suivants. Indiquer si les objets et les images sont réels ou virtuels. Tous les traits de construction doivent être apparents.

Vous ajouterez le sujet à votre copie. **Les schémas sont donc à faire directement sur le sujet.** Barème par figure (MPSI1) : rayons correctement tracés : 2 pts ; conventions respectées : 1 pt ; nature de l'objet et de l'image : 1 pt.





2 Principes de la réfractométrie

La réfractométrie est une technique d'analyse permettant de déterminer l'indice optique d'un échantillon liquide. Dans le cadre du contrôle de la qualité d'une synthèse en chimie, la réfractométrie est une méthode d'analyse permettant d'évaluer indirectement la composition ou la pureté d'un échantillon.

On s'intéressera d'abord au fonctionnement d'un réfractomètre sur la base des lois de l'optique géométrique. Puis on conduira une étude de cas où la réfractométrie est utilisée expérimentalement pour déterminer la teneur en sucre de boissons sucrées.

2.1 Fonctionnement du réfractomètre d'Abbe

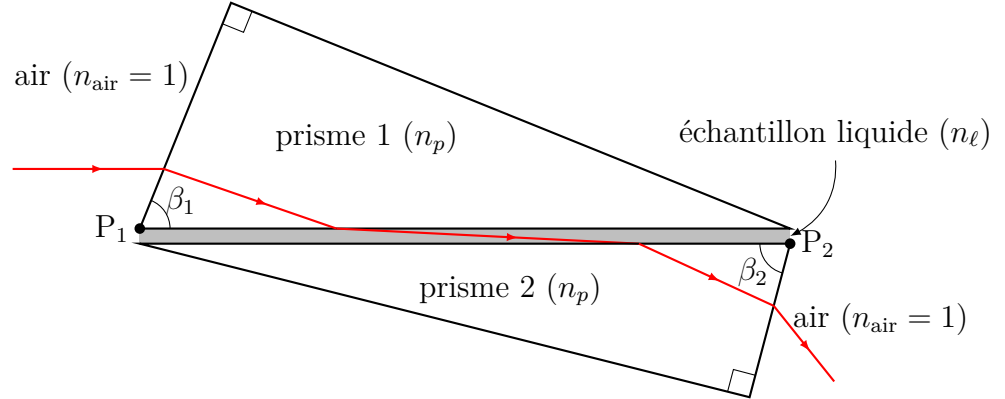
Le réfractomètre d'Abbe est un instrument de mesure de l'indice optique d'un milieu liquide basé sur la caractérisation du phénomène de réfraction subit par la lumière lorsqu'elle traverse ce milieu.

Il est composé de deux prismes notés 1 et 2 taillés en verre *flint* d'indice optique $n_p = 1,7$. On note β_1 et β_2 les angles de taille respectifs des sommets P_1 et P_2 . Ces deux prismes sont séparés par une mince couche d'un échantillon liquide dont on souhaite déterminer l'indice optique $n_\ell < n_p$. Le réfractomètre est supposé être entouré d'air d'indice $n_{\text{air}} = 1$.

réfractomètre d'Abbel commercial

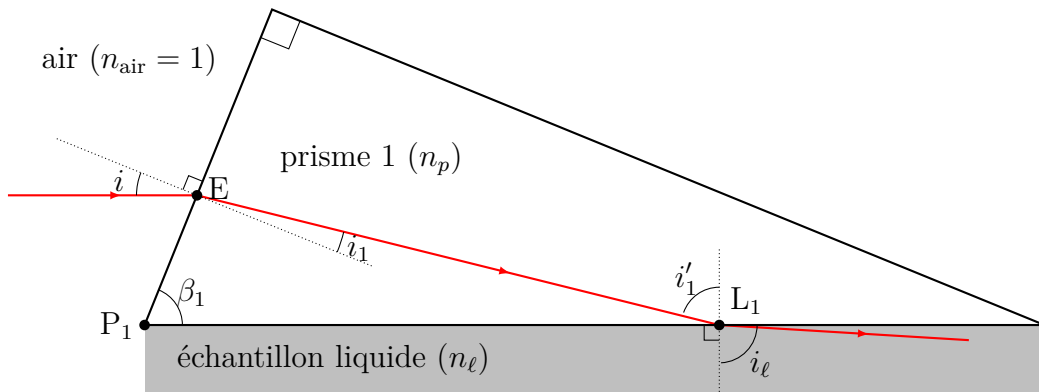


trajet de la lumière dans le réfractomètre



1. Propagation dans le premier prisme : injection d'un rayon sous incidence rasante dans l'échantillon

La face d'entrée du prisme 1 est éclairée par un faisceau de lumière horizontal sous une incidence i par rapport à la surface du prisme au point d'entrée E.



Le rayon incident subit une réfraction en E, se propage dans le prisme 1, puis subit une seconde réfraction au point L_1 au niveau du dioptré prisme 1 / échantillon liquide.

1. Exprimer l'angle i_1 de réfraction en E en fonction de i , n_{air} et n_p .
2. Montrer que le rayon subit une réflexion totale en L_1 si l'angle d'incidence i'_1 vérifie la condition :

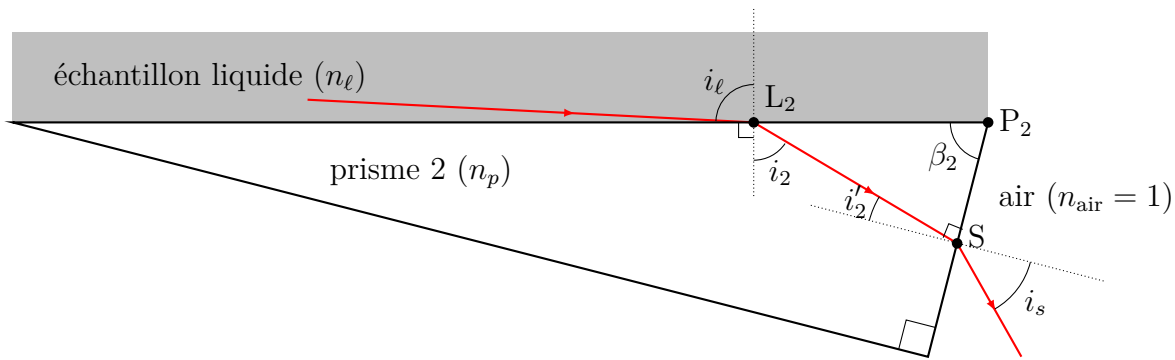
$$i'_1 > i'_{1,\text{lim}}$$

où l'on précisera l'expression de l'angle limite $i'_{1,\text{lim}}$ en fonction de n_p et n_ℓ .

3. Justifier que l'angle i_ℓ de réfraction dans l'échantillon liquide du rayon d'incidence $i'_1 = i'_{1,\text{lim}}$ en L_1 est égal à $\pi/2$.

2. Propagation dans le second prisme : lien entre angle de sortie des rayons et indice optique n_ℓ

Par règle des angles alternes-internes, un rayon sortant avec une incidence quasi-rasante $i_\ell \approx \pi/2$ en L_1 au niveau du dioptré prisme 1 / échantillon arrive en contact avec le dioptré échantillon / prisme 2 en L_2 avec un angle d'incidence $i_\ell \approx \pi/2$.



Le rayon subit alors une réfraction en L_2 , se propage dans le prisme 2, puis subit une réfraction en S sur la face de sortie du réfractomètre.

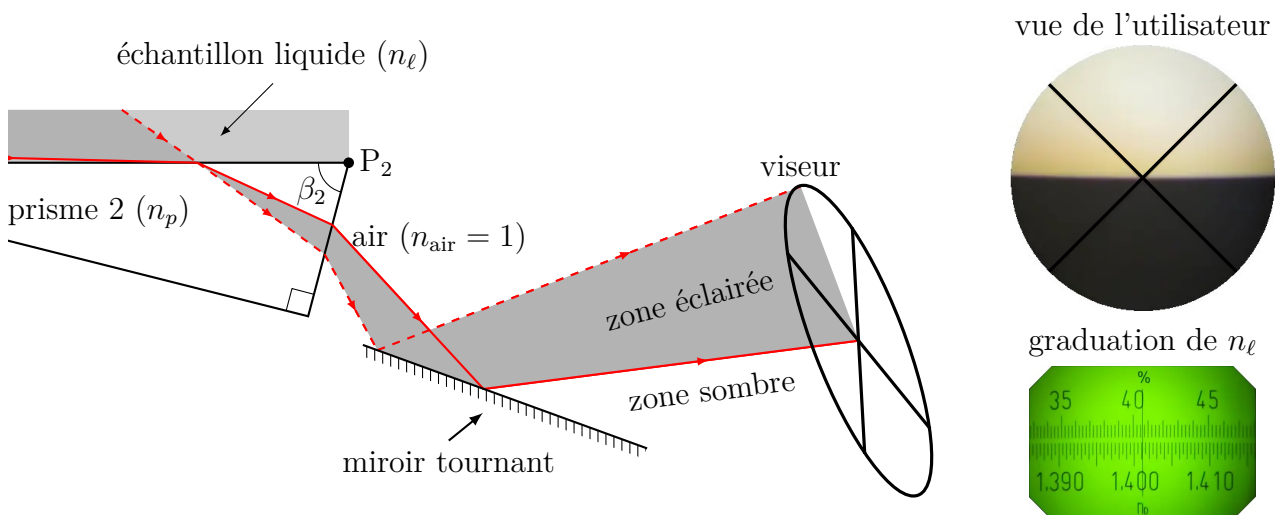
4. Y-a-t-il un risque que le rayon subisse une réflexion totale en L_2 ?
5. Exprimer $\sin(i_2)$ en fonction de n_ℓ et justifier que $i'_2 = \beta_2 - i_2$.
6. En déduire que l'angle de sortie i_s du rayon du prisme vérifie la relation suivante :

$$\sin(i_s) = \sin(\beta_2) \sqrt{n_p^2 - n_\ell^2} - n_\ell \cos(\beta_2)$$

7. Sachant que le réfractomètre considéré a été taillé de sorte que $\beta_2 = \pi/3$, montrer que l'indice optique n_ℓ est solution d'une équation de degré 2.
8. En déduire l'expression de l'indice n_ℓ en fonction de n_p et i_s .

2.2 Analyse par réfractométrie d'une boisson sucrée

Connaissant les valeurs d'indices des prismes n_p du réfractomètre, on peut déterminer la valeur de l'indice de l'échantillon n_ℓ en connaissant celle de l'angle limite de sortie i_s du prisme 2. Pour mesurer i_s , le réfractomètre est muni d'un miroir tournant permettant de dévier la lumière sortant du prisme 2 vers un viseur. Comme aucun rayon ne peut sortir avec un angle inférieur à i_s , on observe au viseur une démarcation nette entre une zone éclairée et une zone sombre.

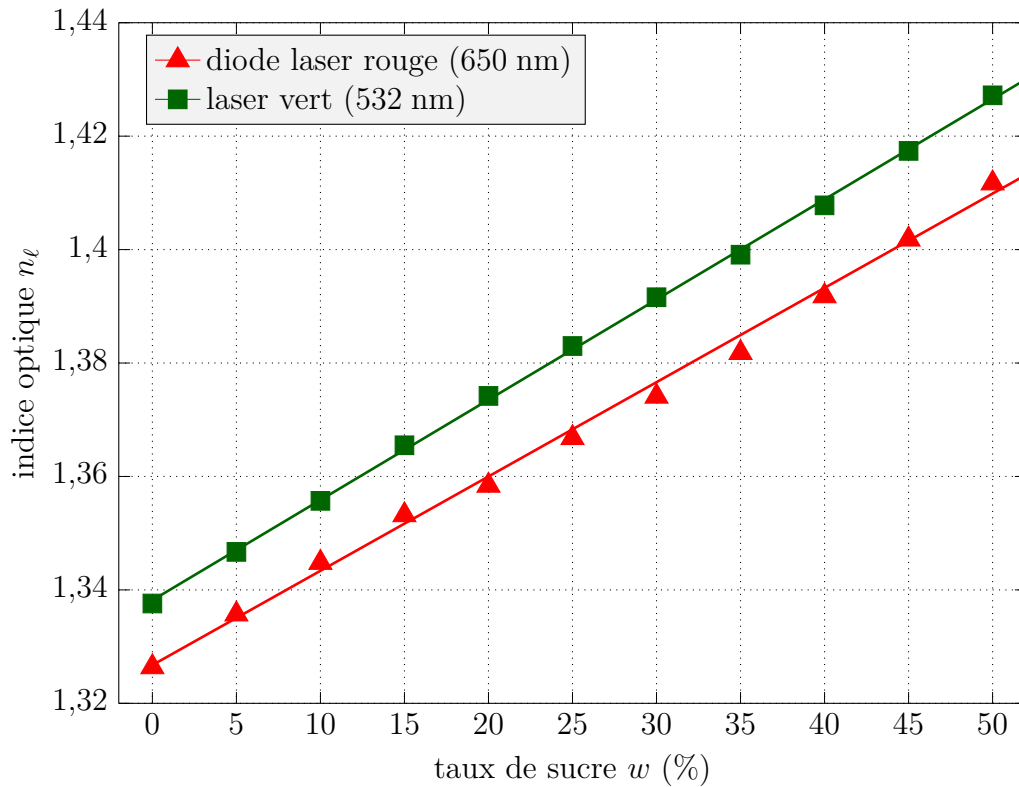


9. Justifier l'affirmation de l'énoncé soulignée.

Il suffit de régler la position du miroir de sortie de façon à viser cette démarcation pour en déduire la valeur de l'indice n_ℓ de l'échantillon à l'aide d'une graduation construite à partir de l'expression déterminée à la question 8.

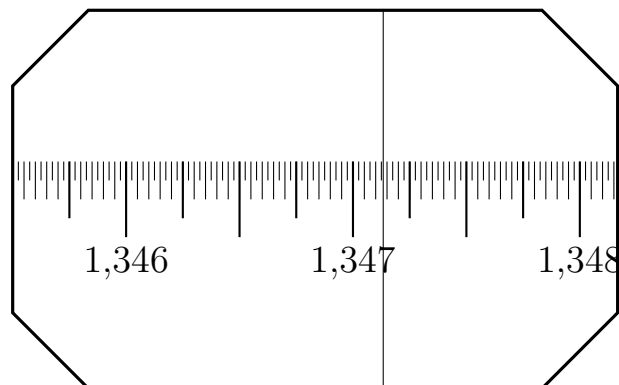
On décide alors d'utiliser la réfractométrie pour déterminer le taux de sucre d'une boisson sucrée commerciale. Le taux de sucre w d'une solution aqueuse de glucose est défini par le pourcentage massique de sucre dans la solution soit la masse en g de glucose m_s dissoute dans 100 g de solution.

À l'aide d'un réfractomètre, on mesure l'indice optique d'un ensemble de solutions de glucose à différents taux de sucre. Les mesures sont conduites en éclairant le réfractomètre avec deux sources de lumière différentes : une diode laser et une lampe à vapeur de sodium. On obtient alors les courbes suivantes :



10. Préciser la raison pour laquelle l'indice optique mesuré dépend de la source de lumière utilisée.
11. Sur la base des résultats expérimentaux, proposer une modélisation reliant l'indice optique n_l d'une solution à son taux de sucre w . On précisera la valeur numérique des coefficients introduits dans cette expression.

À présent, on place dans le réfractomètre, éclairé par la source à 532 nm, un échantillon liquide d'une boisson soda, assimilée à une solution aqueuse de glucose. Une fois le viseur du réfractomètre réglé sur la démarcation, on fait les observations suivantes :



12. Déterminer une mesure du taux de sucre de la boisson. Une rédaction et une évaluation détaillée des incertitudes est attendue.
13. Sachant qu'une canette de soda possède une contenance de 33 cL et qu'un carré de sucre représente 8 g, en déduire une évaluation du nombre de carrés de sucre contenus dans une canette de soda.

3 Lunette de Galilée

Alice a « emprunté » la lunette de Galilée au musée Galilée de Florence. Cette lunette est constituée d'une lentille convergente L_1 de focale $f'_1 = 30$ cm et d'une lentille divergente L_2 de focale $f'_2 = -10$ cm et sert de lunette astronomique (les valeurs des focales ont été modifiées pour les besoins de l'exercice).

Galilée a par exemple utilisé sa lunette pour observer les lunes de Jupiter et en déduire entre autres une première estimation de la vitesse de la lumière. La lentille convergente L_1 sert d'objectif et la lentille L_2 sert en tant qu'oculaire (la lumière entre donc par L_1 et ressort par L_2).

3.1 Observation à l'infini

Alice se rend rapidement compte d'un souci de taille : les lentilles sont fixées dans des tubes distincts pouvant coulisser entre eux ce qui permet de modifier la distance entre les deux lentilles. Malheureusement le musée qui stockait la lunette n'a pas conservé la distance nécessaire pour une observation à l'infini. Il faut donc refaire les calculs pour régler la lunette.

1. Montrer que, pour que le système optique (association des deux lentilles) fasse une image à l'infini d'un objet à l'infini, il faut que $F'_1 = F_2$.
2. En déduire la distance entre les deux lentilles quand cette condition est respectée.
3. À l'aide d'un schéma, calculer le grossissement angulaire $G = \alpha'/\alpha$ du système optique. Ce système est-il pratique pour observer de lointains objets terrestres ?

3.2 Observation à distance finie

On suppose dans cette partie que le système optique garde la configuration déterminée à la partie précédente (F'_1 confondu avec F_2). Alice tente désormais d'observer un objet de taille 10 cm situé à une distance 60 cm de la lentille convergente L_1 . Elle s'énervait d'y voir tout flou et se dit que décidément les calculs d'optique ça ne compte pas pour des prunes !

On ne considère pour l'instant que L_1 .

4. Déterminer graphiquement la position, la taille et la nature de l'image obtenue par la lentille L_1 .
5. Démontrer ces résultats par le calcul.

On considère désormais l'ensemble des deux lentilles.

6. Déterminer graphiquement la position, la taille et la nature de l'image obtenue par le système optique.
7. Démontrer ces résultats par le calcul.
8. En collant son œil à l'oculaire, Alice sera-t-elle capable de distinguer l'objet observé avec la lunette ? On supposera qu'Alice est un être humain académique.

4 Correction d'un œil

Après s'être diablement énervée contre la lunette de Galilée de l'exercice précédent, Alice est allée chez son ophtalmologue. Il s'avère qu'elle est un peu myope ce qui forcément ne lui facilite pas la vie...

Étant donné que l'on n'est jamais mieux servi que par soi-même, elle décide de faire les calculs afin de déterminer les lunettes qu'il lui faut.

Elle considère que son œil myope a une profondeur $P = 2,50$ cm (distance entre la lentille de l'œil et la rétine), une pupille de diamètre $D = 5,00$ mm et une focale inconnue f' lorsque ses yeux

accommodent à l'infini. On suppose dans toute la suite de l'exercice qu'elle accommode toujours à l'infini et donc que la focale de ses yeux ne change pas. Elle cherche dans un premier temps à déterminer cette focale f' .

1. À partir de la limite de résolution angulaire de l'œil : $\theta_1 = 3,00 \times 10^{-4}$ rad, exprimer puis calculer la taille d'un cône en supposant l'œil uniquement limité en résolution par la taille des cônes.
2. Quel critère sur la tache formée par une image sur la rétine permet de savoir si celle-ci est vue floue ou non ?

Un ophtalmologue a pris un cliché de la rétine de son œil : lorsqu'Alice observe un point lumineux situé à l'infini, cela forme une tache de diamètre $d = 15,00 \mu\text{m}$ sur sa rétine.

3. Vérifier à l'aide de la question précédente qu'Alice a bien des problèmes oculaires. Sachant qu'elle est myope, faire un schéma représentant un modèle de ses yeux observant un point A situé à l'infini.
4. Démontrer que :

$$\frac{d}{D} = \frac{P - f'}{f'}$$

5. En déduire l'expression puis la valeur numérique de f' .

Maintenant qu'Alice connaît la distance focale de son œil, elle peut faire le calcul de la distance focale des lentilles équipant les lunettes qu'elle devra porter.

6. Montrer que lorsque deux lentilles sont accolées, on obtient un système optique équivalent à une seule lentille dont la vergence est la somme des vergences des lentilles accolées.
7. Quel devra être la nature et la distance focale des lentilles équipant les lunettes d'Alice en les supposant accolées à la lentille de l'œil ?

Pour plus de sécurité, Alice décide de faire le calcul exact en prenant en compte le petit écart entre les lunettes et la lentille des yeux : $L = 2,000$ cm.

8. En supposant que la lentille est de même nature que précédemment, quelle devra être sa nouvelle distance focale pour que l'œil ainsi corrigé puisse observer net à l'infini ? Vous exprimerez le résultat en fonction de f' , P et L . Conclure : le résultat est-il très différent ?