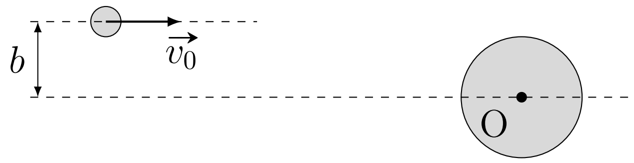
DM n ° 17

Pour le lundi 17 mars 2025
MPSI2 – 2024/2025

Exercice 1 : Trajectoire d'un astéroïde géocroiseur



Un astéroïde de masse $m = 1{,}0 \times 10^{18}$ kg s'approche dangeureusement de la Terre. Il possède une vitesse $v_0 = 10\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, avec un paramètre d'impact $b = 8{,}0 \times 10^3$ km défini sur la figure. À cet instant, l'attraction terrestre peut encore être négligée devant l'énergie cinétique de l'astéroïde.

La Terre est supposée sphérique, de centre O, de rayon $R_\text{T} = 6{,}4 \times 10^3$ km et de masse $M_\text{T} = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg. Nous assimilerons l'astéroïde à un point matériel M pour étudier son mouvement. La constante de gravitation universelle est $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Montrer que le moment cinétique par rapport à O de l'astéroïde se conserve. Justifier alors que le mouvement est plan. Calculer la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$.
2. Définir l'énergie potentielle effective $E_{p,e}$ de l'astéroïde puis tracer en justifiant brièvement son allure en fonction de r, la distance de l'astéroïde au centre de la Terre.
3. Calculer l'énergie mécanique de l'astéroïde. S'agit-il d'un état lié ou d'un état de diffusion ?
4. Déduire de l'expression de $E_{p,e}$ la distance minimale d'approche de l'astéroïde par rapport à la Terre.

Exercice 2 : Exercice 6 du TD M6 : chute d'un arbre

Exercice 3 : Vers Mars

Données :

— Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$;
— masse du Soleil $M_\text{S} = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg ;
— masse de la Terre : $M_\text{T} = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg ;
— rayon de la Terre : $R_\text{T} = 6{,}37 \times 10^3$ km ;

— masse de Mars : $M_{\mathrm{M}} = 6{,}39 \times 10^{23}$ kg ;
— rayon de Mars : $R_{\mathrm{M}} = 3{,}39 \times 10^{3}$ km ;
— rayon de l'orbite terrestre : $d_{\mathrm{T}} = 150 \times 10^{6}$ km ;
— rayon de l'orbite de Mars : $d_{\mathrm{M}} = 228 \times 10^{6}$ km.

Dans cette exercice, on cherche à estimer le delta-V nécessaire à un voyage vers Mars. En effet, tout moteur de fusée fonctionne de la même façon : il s'agit d'éjecter de la matière vers l'arrière de la fusée afin que celle-ci soit propulsée vers l'avant. La combustion d'une quantité de gaz donnée génère donc une variation de vitesse donnée liée à la masse de produit de combustion éjectée. On considère deux modèles traités dans les deux parties qui suivent ; dans ces deux parties, les hypothèses suivantes seront faites :

— les poussées sont instantanées : la vitesse passe instantanément de v à $v + \Delta v$;
— les orbites de Mars et la Terre sont circulaires et coplanaires ;
— l'influence du Soleil est négligée tant que l'on est sur une orbite liée d'une planète (Mars ou la Terre) ;
— on néglige toute force non conservative hors des phases de poussée, en particulier l'effet des frottements atmosphériques au décollage et à l'atterrissage ;
— on néglige la rotation propre des planètes ;
— on néglige R_{M} et R_{T} devant d_{M} et d_{T}.

Pour commencer, on utilise une première poussée de Δv_1 pour se libérer de l'attraction terrestre et atteindre une orbite héliocentrique circulaire de rayon d_{T}.

Pour passer de l'orbite terrestre à l'orbite martienne, on utilise une orbite de transfert de Hohmann : c'est une ellipse dont le périhélie est un point de l'orbite de la Terre et l'aphélie un point de l'orbite de Mars (figure 1). On supposera, pour simplifier, que les orbites de la Terre et de Mars sont circulaires. On réalise alors une poussée de Δv_2 pour atteindre l'orbite elliptique de transfert, puis une poussée de Δv_3 afin d'atteindre une orbite circulaire héliocentrique de rayon d_{M}.

Enfin, il ne reste alors plus qu'à freiner avec une poussée Δv_4 pour arriver à la surface de Mars sans s'écraser.

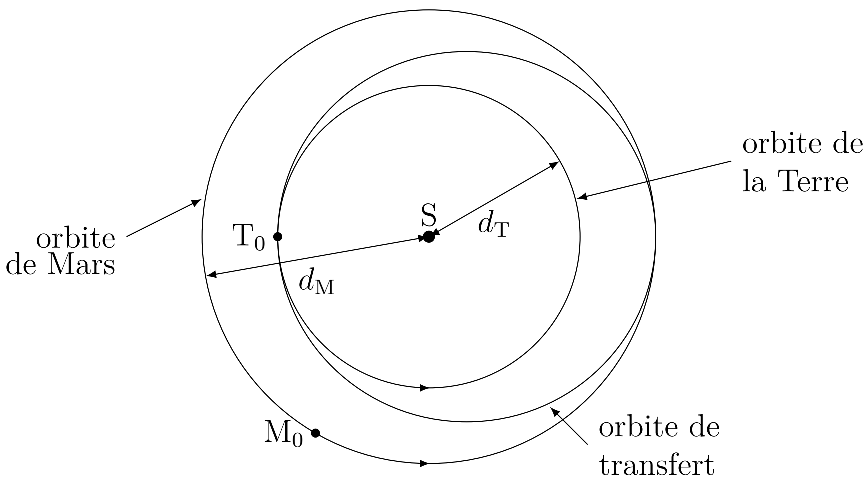


Figure 1 – Orbites de la Terre et de Mars, orbite elliptique de Hohmann.

Première poussée.

1. Déterminer l'expression de la vitesse de libération (seconde vitesse cosmique) de la Terre.
2. En déduire l'expression puis la valeur numérique de Δv_1. Quelles hypothèses fait-on ?

Transfert : seconde et troisième poussée. Après la première poussée, on considère que la fusée est immobile par rapport à la Terre, suffisamment loin de celle-ci pour ne pas subir son attraction, mais toujours à la même distance du Soleil que la Terre. On se place dans le référentiel héliocentrique.

3. Déterminer la vitesse de la Terre autour du Soleil ; en déduire la vitesse de la fusée autour du Soleil à cette étape.
4. Déterminer le demi-grand axe a de l'ellipse de transfert.
5. Donner sans démonstration l'expression de l'énergie mécanique de la fusée sur l'orbite de transfert.
6. En déduire l'expression de la vitesse de la fusée sur cette orbite lorsqu'elle est à une distance r du soleil :

$$v_{\mathrm{F/S,ellipse}}(r) = \sqrt{2\mathcal{G}M_{\mathrm{S}}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d_{\mathrm{T}} + d_{\mathrm{M}}}\right)} \tag{E}$$

7. Donner alors l'expression puis la valeur numérique de Δv_2.
8. À quelle vitesse devra orbiter la fusée pour être sur l'orbite circulaire martienne ?
9. En déduire l'expression puis la valeur numérique de Δv_3.

Dernière poussée. À ce stade, la fusée est donc immobile par rapport à Mars. Elle est après ce transfert relativement loin de Mars, si bien que son énergie potentielle d'interaction avec Mars est négligeable. À cause de l'attraction martienne, elle se rapproche progessivement de la surface martienne. On cherche à arriver à la surface sans encombre.

10. Quand devra avoir lieu la poussée Δv_4 et que devra-t-elle valoir ?
11. Conclure : donner la valeur numérique du delta-V total nécessaire à cette mission.

Durée du voyage. On cherche la durée du transfert, que l'on approxime à la durée nécessaire à parcourir l'ellipse de Hohmann. Les positions au début du transfert de la Terre et de Mars sont notées respectivement $\mathrm{T_0}$ et $\mathrm{M_0}$ (figure 1).

12. Déterminer la durée du transfert. En déduire la position de Mars au moment du lancement sur Terre. En déduire également la position de la Terre au moment de l'arrivée du vaisseau à proximité de Mars (les positions de la Terre et de Mars seront à ce moment là notées respectivement T_1 et M_1).
13. Montrer qu'un nouveau transfert, à partir de la Terre, ne peut avoir lieu qu'environ 780 jours après le premier lancement (période synodique).
14. Une fois le vaisseau arrivé au voisinage de la planète Mars $(\mathrm{M}_1, \mathrm{T}_1)$, combien de temps faut-il attendre pour envisager un transfert d'Hohmann permettant de ramener le vaisseau à proximité de la Terre (voyage retour) ? On notera T_2 et M_2 les positions respectives de la Terre et de Mars au début de ce second transfert.
15. Représenter les points T_0, M_0, T_1, M_1, T_2 et M_2, ainsi que les orbites d'aller et de retour, sur un schéma.
16. En déduire qu'une mission aller-retour vers Mars dure au minimum 972 jours.