
INDISPENSABLES

Exercice 1 : Oscillation d'une tige rigide : étude numérique

On considère l'oscillation d'une tige rigide autour de son extrémité, tenue par un pivot parfait. On donne le moment d'inertie correspondant $J = \frac{mL^2}{3}$, où L désigne la longueur de la tige.

1. Énoncer le théorème du moment cinétique.
2. Démontrer que :

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L} \sin \theta = 0$$

3. Résoudre l'équation aux petits angles pour $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.
4. Quelle valeur de L doit on choisir pour avoir une période de 1,00 s aux petits angles ?
5. On choisira donc pour le programme $L = 0,372735$ m et $g = 9,81$ m·s⁻². **Les codes pourront être envoyés par mail.** Il faut les tester !
 - (a) Résoudre numériquement l'équation du pendule (non approximée bien sûr !) pour $\theta_0 = 0,05$ rad et $\dot{\theta}(0) = 0$ en implémentant la méthode d'Euler. On fera un calcul sur 5 s et on prendra 100 000 pas de temps.
 - (b) Mesurer graphiquement la période pour $\theta_0 = 0,05$ rad, $\theta_0 = 0,1$ rad, $\theta_0 = 0,7$ rad et $\theta_0 = 2$ rad.
La méthode d'Euler pose problème pour des pas de temps un peu grands (vous pouvez regarder la résolution en divisant le nombre de pas par 100 !).
 - (c) Résoudre numériquement l'équation du pendule (non approximée bien sûr !) pour $\theta_0 = 0,05$ rad et $\dot{\theta}(0) = 0$ en utilisant le module `odeint`. On choisira un pas de temps de 0,001 s et un calcul sur 5 s.
 - (d) Écrire un programme résolvant l'équation du mouvement pour θ_0 allant de 0,01 rad à 3,14 rad tous les 0,01 rad. Obtenir la courbe représentant la période en fonction de l'angle initial.

Exercice 2 : Carabine-jouet à ressort

Une carabine-jouet à ressort est modélisée de la manière suivante : un ressort de raideur k est placé dans un tube cylindrique en plastique de longueur ℓ_0 égal à la longueur à vide du ressort. On dépose au bout de ce ressort une balle en plastique de masse m et on comprime le ressort d'une longueur $\Delta\ell$ à l'intérieur du tube. Le tube étant incliné de 60° par rapport à l'horizontale, on libère le ressort qui propulse instantanément la balle. On néglige le frottement de la balle dans le tube et la résistance de l'air.

1. À quelle vitesse v_0 la balle sort-elle du canon de la carabine ?
2. Quelle hauteur h (par rapport à la sortie de la carabine) la balle atteint-elle dans ces conditions ? Avec quelle vitesse v_H ?

Données : $m = 20$ g, $k = 400$ N · m⁻¹ et $\Delta\ell = 10$ cm.

Exercice 3 : Tri postal

On étudie un convoyeur à colis présent dans un centre de tri postal. Les colis sont déchargés par un tapis roulant à la vitesse $v_A = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Les colis glissent ensuite sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale.

Le coefficient de frottement entre les colis et le plan incliné est $f = 0,4$. Les colis arrivent ensuite sur un nouveau tapis roulant qui avance à la vitesse $v_B = 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Le convoyeur fonctionne correctement si les colis arrivent au point B avec la vitesse du second tapis roulant.

On rappelle que s'il y a glissement, $T = fN$, où T et N désignent respectivement les normes de forces de réaction tangentielle et normale.

1. Démontrer que la force de frottement solide est :

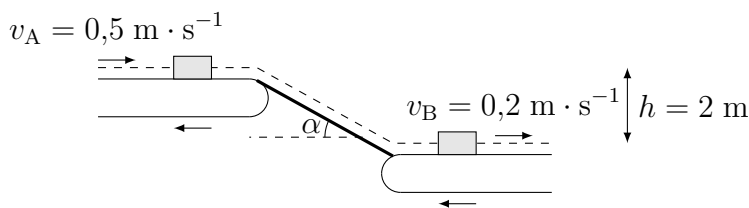
$$\vec{T} = -fmg \cos \alpha \vec{u}_x$$

où $\vec{u}_x$ est la direction de la pente.

2. En déduire que :

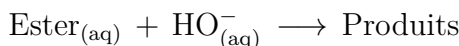
$$W_{AB}(\vec{T}) = -\frac{fmg h}{\tan \alpha}$$

3. Déterminer l'expression puis la valeur numérique de l'angle α qui permet le bon fonctionnement du convoyeur.



Exercice 4 : Saponification d'un ester

On considère la réaction de saponification en solution :



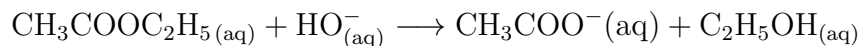
La réaction est d'ordre 1 par rapport à HO^- et par rapport à l'ester. À $t = 0$, on a $[\text{HO}^-] = [\text{Ester}] = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ à $T_1 = 27^\circ\text{C}$. Après 2 heures, les trois quarts de l'ester ont disparu.

1. Calculer la constante de vitesse et le temps de demi-réaction.
2. À $T_2 = 227^\circ\text{C}$, la constante de vitesse est multipliée par 4. Calculer l'énergie d'activation de la réaction.

FACULTATIFS.

Exercice 5 : Retour sur le TP de chimie (si vous ne l'avez pas fait)

On étudie la réaction (lente) de saponification de l'acétate d'éthyle :



- On introduit $V_1 = 25 \text{ mL}$ de soude $c_1 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $V_2 = 25 \text{ mL}$ d'eau et $V_3 = 50 \text{ mL}$ d'acétate d'éthyle à $c_3 = 0,05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Déterminer les concentrations initiales en ions hydroxyde, sodium et en acétate d'éthyle.
- On note $C(t) = [\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5](t)$. On suppose que l'ordre global est de 2. Montrer que :

$$\frac{dC}{dt} = -kC^2$$

En déduire $C(t)$.

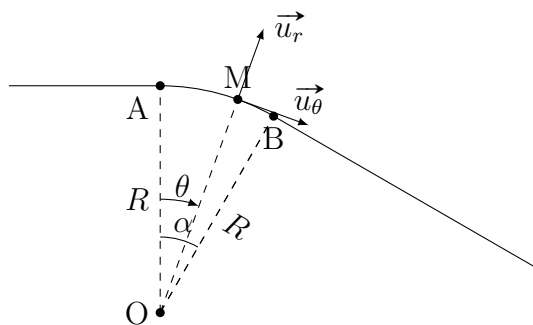
- La conductivité de la solution est liée à la concentration des différents ions. Elle est donnée par la loi de Kohlrausch (voir fiche TP conductimétrie). Exprimer σ en fonction de x , $\lambda_{\text{Na}^+}^0$, $\lambda_{\text{CH}_3\text{COO}^-}^0$, $\lambda_{\text{HO}^-}^0$ et C_0 .
- En considérant la réaction totale, montrer que :

$$\frac{\sigma(t) - \sigma(0)}{\sigma(\infty) - \sigma(0)} = \frac{x(t)}{C_0 - x(t)} = C_0 kt$$

Exercice 6 : Décollage d'un véhicule

Une voiture, assimilée à un point matériel M de masse $m = 1000 \text{ kg}$ amorce une descente en A à la vitesse $v_0 = 125 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ (schéma ci-dessous). On assimile le début de la descente de A à B à un arc de cercle de centre O, de rayon $R = 130 \text{ m}$ et d'angle $\alpha = 15^\circ$.

On suppose que durant la descente, la force motrice de la voiture est tangente à la route et de valeur algébrique $\bar{F}$ positive et constante (le sens est choisi de telle façon à ce qu'une force motrice soit positive, une force résistante négative). On néglige les frottements sur la route (on peut les prendre en compte dans $\bar{F}$).



- Déterminer les équations du mouvement en projection sur la base polaire de centre O.
- Après avoir multiplié l'équation selon $\vec{u}_\theta$ par $\dot{\theta}$, l'intégrer.
- Déterminer l'expression de la réaction normale R_n en fonction de R , θ , g , m , v_0 et $\bar{F}$.
- Donner l'équation vérifiée par l'angle θ_d pour lequel la voiture quitterait le sol.
 - Calculer cet angle dans le cas où le conducteur coupe le moteur en A. Conclure.
 - Est-il préférable d'accélérer ou de freiner ? Calculer la valeur de $\bar{F}$ pour que la voiture arrive en B sans encombre.

Exercice 7 : Mouvement d'un point relié par 4 ressorts (difficile)

Quatre ressorts de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k sont aux extrémités d'un carré de côté $\ell_0\sqrt{2}$ et reliés à un point de masse m proche du centre du carré. Déterminer les équations horaires du mouvement et la trajectoire une vitesse verticale $\vec{v}(0) = v_0\vec{u}_y$ et une masse écartée vers la droite de la position d'équilibre $OM(0) = d\vec{u}_x$. O désigne le centre du carré.

Quelques indications :

- Commencez par montrer que l'énergie potentielle peut s'écrire à l'ordre le plus bas en x, y (dans le repère du carré) :

$$E_p = k(x^2 + y^2)$$

- Concluez en repassant par la force dérivant de cette énergie potentielle.
- Si $\varepsilon \ll 1$, alors $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \varepsilon/2$.