DM n ° 13

Pour le lundi 27 janvier 2025

MPSI2 – 2024/2025

Exercice 1 : Étude d'un flipper

On se met dans la peau d'un ingénieur travaillant chez un fabricant de Flipper. Votre patron vient de recevoir une commande de Flipper et vous charge de répondre au cahier des charges imposés par le client.

1.1 Cahier des charges, données technique et contraintes

Le Flipper doit avoir un plateau dont la forme est montrée figure 1 et être incliné de $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale (avec les coins arrondis vers le haut).

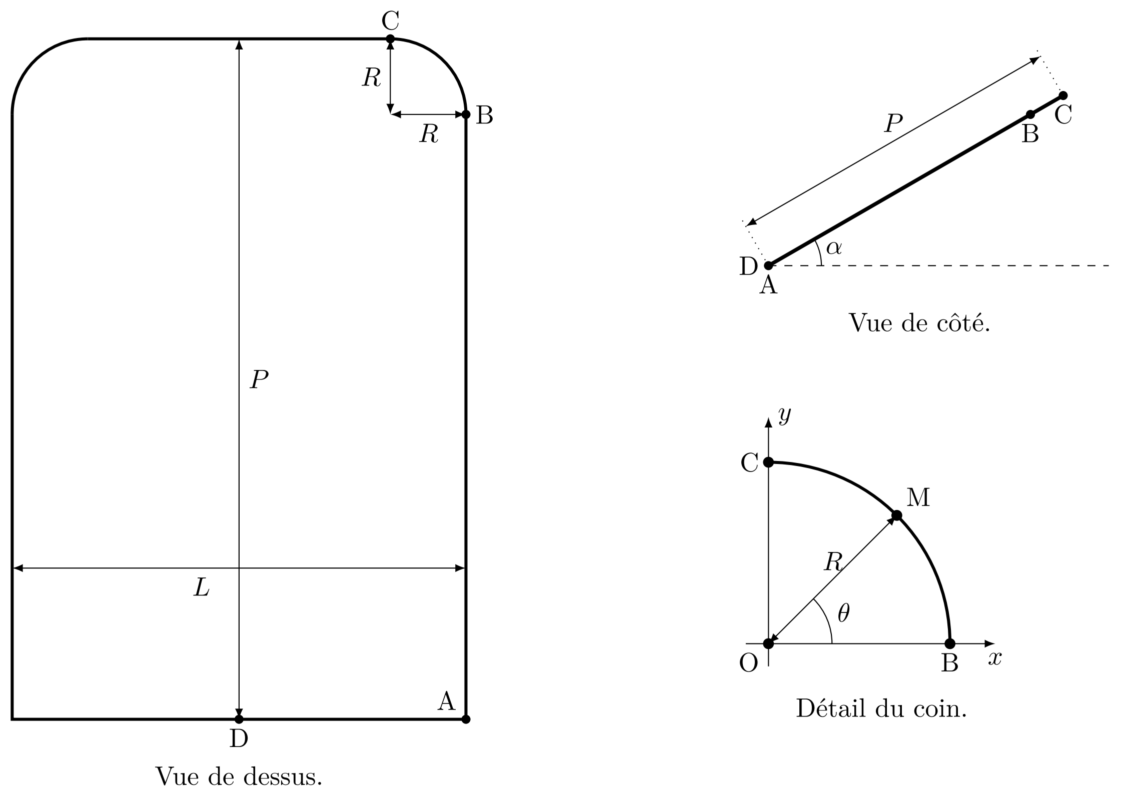

FIGURE 1 – Vue du plateau de Flipper.

Les points A, B, C et D représentent différentes étapes du parcours de la bille. Le rayon R des deux quarts de cercle des deux coins n'est pas fixé : le service marketing insiste pour qu'il soit le plus grand possible.

Un rail sera installé du côté droit du flipper de façon à ce qu'une bille lancée à l'aide d'un ressort soit propulsée le long du côté droit, roule sur le coin arrondi puis chute sur le plateau (parcours ABCD). La bille ne devra pas tomber avant d'avoir fini de parcourir le coin arrondi (en C). Le client exige que si le joueur tend le ressort en butée la bille devra tomber en plein centre du plateau (point D) (faisant ainsi perdre le joueur et augmentant donc la rentabilité de notre client). Le ressort est placé devant le plateau. Ainsi la bille est lancée depuis le bas du plateau (en A). On produit en usine des ressorts de longueur à vide 20 cm que l'on peut comprimer de moitié sans risques d'endommagement. On fixera donc la butée à ce niveau de compression. La constante de raideur de ces ressorts est facilement réglable en jouant sur le diamètre du fil d'acier que l'on enroule. Dans tout l'exercice, on modélisera la bille par un point et négligeront donc l'impact de sa rotation. Cependant : comme la bille roule, l'impact des frottements est négligeable.

Problématique : comment régler R et k afin de satisfaire les exigences du client ?

Données :

— largeur du plateau : $L = 60$ cm ;

- profondeur du plateau : $P = 120$ cm ;
- masse de la bille d'acier $m = 200$ g ;
- accélération de pesanteur : $g = 9{,}81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1.2 Étude de la chute sur le plateau (partie CD)

On s'intéresse à la dernière phase du mouvement de la bille : lorsque celle-ci quitte le coin arrondi et commence à tomber sur le plateau. On note v_C la vitesse de la bille lorsqu'elle quitte le coin (au point C). On cherche dans cette partie à exprimer v_C de façon à ce que la bille tombe au milieu du plateau une fois arrivée en bas.

1. Justifier que la vitesse initiale en C est horizontale.
2. Déterminer l'équation de la trajectoire de la bille sur le plan incliné.
3. En déduire que la vitesse v_C de la bille à la fin du coin arrondi doit satisfaire la relation :

$$v_\text{C}\sqrt{\frac{2P}{g\sin\alpha}} = \frac{L}{2} - R$$

1.3 Étude du coin (partie BC)

Sur les bords du plateau, un muret est présent. La bille va rouler le long de ce muret (ce qui fait que l'on peut négliger l'impact des frottements solides) elle est donc en contact avec deux supports : le plateau en lui-même et le muret, chacun exerçant sa force de réaction.

Dans cette partie, on choisit le repère centré sur le centre de l'arc de cercle du coin arrondi. L'axe des y est celui de la longueur (profondeur du point de vue du joueur), l'axe x celui de la largeur. L'axe des z est donc orthogonal au plateau vers le haut et n'est pas vertical. On choisira des coordonnées cylindriques avec l'angle choisi sur le schéma. (se référer au schéma de droite figure 1 pour le choix du repère).

4. Faire un bilan des forces. Projeter l'ensemble des forces dans le repère choisi. En particulier, démontrer que :

$$\vec{P} = -mg\left(\cos\alpha\,\vec{u_z} + \sin\alpha\cos\theta\,\vec{u_\theta} + \sin\alpha\sin\theta\,\vec{u_r}\right)$$

5. Quelles sont les conditions à vérifier sur les deux forces de réaction normale des supports pour que la bille ne tombe pas avant de sortir du coin ?
6. Établir la relation suivante :

$$\frac{R}{2}\dot{\theta}^2 + g\sin\alpha\sin\theta = \frac{v_\text{B}^2}{2R}$$

où v_B est la vitesse de la bille lorsqu'elle entre dans le coin.

7. Établir la relation suivante :

$$N_r = mR\dot{\theta}^2 - mg\sin\alpha\sin\theta$$

où N_r est la norme de la réaction normale exercée par le bord du plateau sur la bille (composante r).

8. En déduire la valeur minimale de v_B nécessaire pour que la bille ne tombe pas avant de sortir du coin :

$$v_\text{B,min} = \sqrt{3gR\sin\alpha}$$

En déduire la valeur de v_C correspondante :

$$v_\text{C,min} = \sqrt{gR\sin\alpha}$$

1.4 Étude du rail et du ressort (ressort sous A puis partie AB)

Dans cette partie, deux phases sont présentes : la phase de lancer de la bille et la phase où la bille monte à l'aide de sa vitesse initiale.

9. Établir la relation suivante pour la phase de montée :

$$\frac{1}{2}mv_\text{B}^2 - \frac{1}{2}mv_\text{A}^2 = -mg\,(P - R)\sin\alpha$$

où v_A est la vitesse initiale communiquée à la bille par le ressort (vitesse en A).

10. Établir la relation suivante pour la phase de lancer par le ressort en butée :

$$\frac{1}{2}k\left(\frac{\ell_0}{2}\right)^2 - mg\frac{\ell_0}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}mv_\text{A}^2$$

1.5 Conclusion

11. À l'aide des relations précédentes, donner la valeur de R que l'on doit choisir.
12. À l'aide des relations précédentes donner la valeur de k que l'on doit choisir. Commentez.