DM n ° 12

Pour le vendredi 17 janvier 2024
MPSI2 – 2024/2025

Exercice 1 : Vitesse des gouttes de pluie

On s'intéresse à la chute dans l'air d'une goutte d'eau de diamètre D et de masse volumique $\rho = 1{,}0 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. On prendra pour l'air une masse volumique égale à $\rho_a = 1{,}3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. L'axe Oz est vertical descendant. L'accélération de la pesanteur vaut $\vec{g} = g\vec{e_z}$, avec $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Q1. Définir « référentiel galiléen ». Définir et exprimer le poids d'une goutte d'eau.

Q2. On admet que la seule autre force mise en jeu est la force de frottement, due à l'air, proportionnelle au carré de la vitesse v de la goutte. Elle s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{\text{frott}}} = -C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e_z} \quad \text{avec} \quad C = 6{,}0 \times 10^{-2}$$

Vérifier l'homogénéité de cette formule.

Q3. En appliquant la seconde loi de Newton à la goutte dans le référentiel terrestre, montrer que sa vitesse limite, donc indépendante du temps, s'écrit :

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\vec{e_z}$$

où K est un coefficient à exprimer en fonction de ρ, ρ_a, C et g.

Q4. Calculer la vitesse limite pour des diamètres égaux à 1 mm, 3 mm et 5 mm.

Gunn et Kinzer ont mesuré en 1949 avec précision des vitesses limites de gouttes de différents diamètres. Les résultats de leurs mesures sont reportés sur la figure 1 en trait plein ainsi que la représentation de la relation obtenue en **Q3** en traits pointillés.

Q5. Pour quelle(s) raison(s) le modèle théorique élaboré aux question **Q2** à **Q4** n'est-il pas validé pour toutes les tailles de gouttes ?

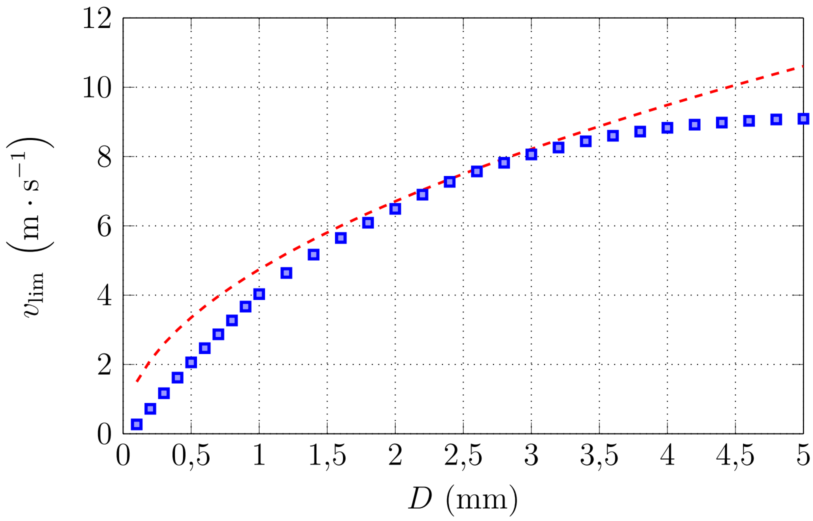

Figure 1 – Influence du diamètre des gouttes sur la vitesse limite.

On étudie ensuite le mouvement d'une goutte de pluie à l'aide d'une résolution numérique. On utilise pour cela la méthode d'Euler, dans un algorithme écrit en Python retranscrit ci-dessous :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Nombre de pas de calculs
n=5000
# Duree de la simulation
tmax=5.0
# Pas de temps
dt=
# Tableau des temps a calculer
t=np.linspace(0,tmax,n+1)
# Tableaux de calculs, stockant les valeurs au cours du temps
vz=np.zeros(n+1)
z=np.zeros(n+1)
vz[0]=
z[0]=
# Parametres
g=
K=
D=
# Boucle de calcul implementant la methode d'Euler
for i in range(0,n):
 vz[i+1]=
 z[i+1]=
# Affichage de la courbe
plt.figure(1)
plt.plot(t,z)
plt.show()
plt.figure(2)
plt.plot(t,vz)
plt.show()
```

Q6. Compléter l'algorithme.

Q7. Les graphiques ci-dessous sont ceux de la position $z(t)$ et de la vitesse $v(t)$ obtenus par l'algorithme. La vitesse limite obtenue est-elle compatible avec les observations ?

Q8. Déterminer la distance z_{75} au bout de laquelle la goutte atteint 75% de sa vitesse limite. Conclure.

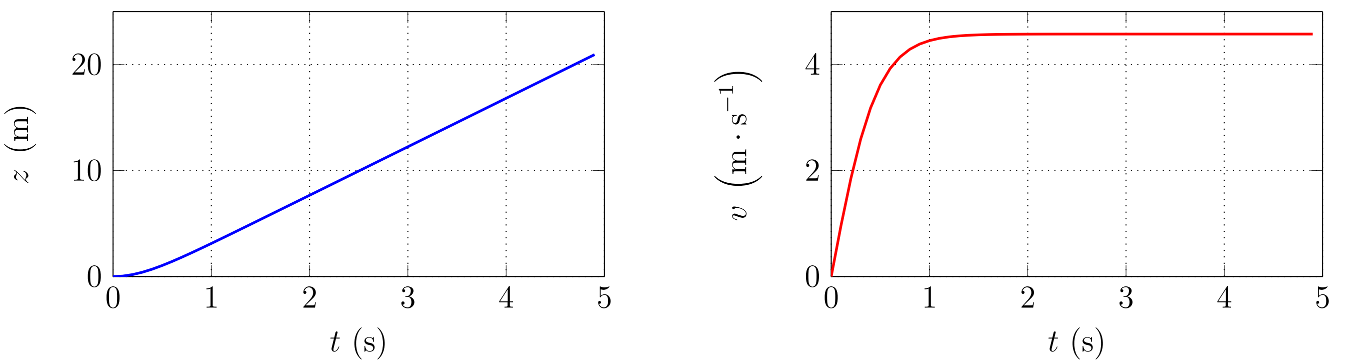

FIGURE 2 – Position $z(t)$ et vitesse $v(t)$ au cours de la chute d'une goutte de 1 mm de diamètre, courbes obtenues en traçant les résultats de l'algorithme d'Euler ci-dessus.

Selon les précipitations, la taille des gouttes de pluie est très variable. La distribution des tailles de goutte, qui renseigne sur les évènements météorologiques, doit souvent être mesurée. On utilise pour cela un disdromètre (« *Distribution of Drops Meter* »).

Exercice 2 : Disdromètre à impact avec platine

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation :

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\overrightarrow{e_z} \quad \text{avec} \qquad K = 150\ \text{m}^{1/2}\cdot\text{s}^{-1}$$

Il existe deux types de disdromètres : le plus ancien est le distromètre à impact (photo 3).

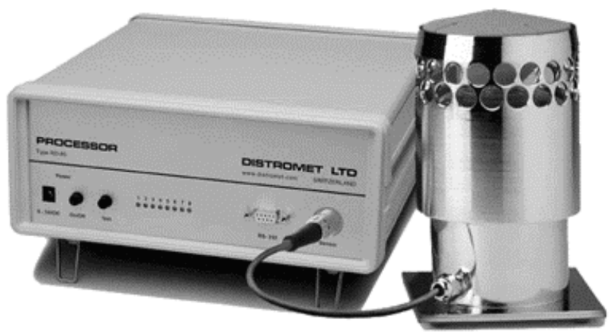

Figure 3 – Disdromètre Joss-Waltvogel.

Il se compose d'une platine sensible recevant les gouttes de pluie de masse $m(D)$ ayant atteint leur vitesse limite et d'un système de traitement permettant la mesure de celle-ci.

On modélise la platine par un disque plan horizontal, de rayon R et de masse M, relié à un support fixe par l'intermédiaire d'une suspension, modélisée par un système masse-ressort amorti.

On note k la raideur du ressort liant la platine au support, ℓ_0 sa longueur à vide et λ le coefficient de frottement traduisant l'amortissement du disque : la force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de la platine, s'écrit donc $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v_{\text{platine}}}$.

La goutte exerce, lors de son impact sur la platine, une force $\overrightarrow{F(t)} = F(t)\overrightarrow{e_z}$ verticale sur celle-ci.

Le référentiel lié au support est supposé galiléen.

Le déplacement de la platine du disdromètre par rapport à sa position d'équilibre est $Z(t)$ (figure 4).

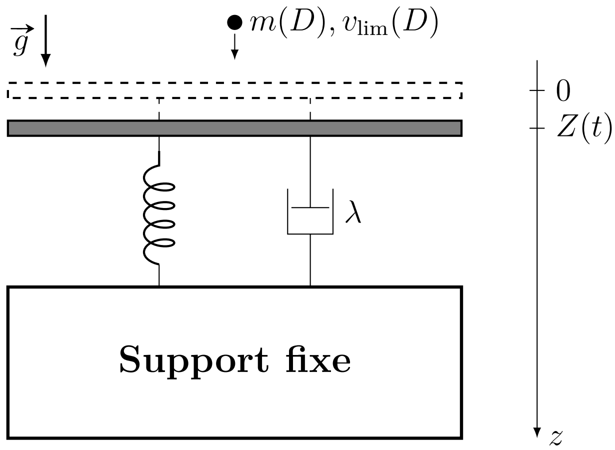

Figure 4 – Modélisation du disdromètre à impact à platine.

Q9. Exprimer la longueur $\ell_{\text{équ}}$ du ressort à l'équilibre de la platine, sans impact de goutte.

Q10. Montrer que l'équation liant $Z(t)$ à $F(t)$ est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} + \beta Z(t) = \frac{F(t)}{M}$$

et exprimer les coefficients γ et β en fonction de k, M et de λ.

La force $F(t)$ est modélisée par :

$$\begin{aligned} F = F_0 &= m(D)\frac{v_{\text{lim}}(D)}{\tau(D)} \quad \text{pour} \quad 0 < t < \tau \\ &= 0 \quad \text{pour} \quad t > \tau \end{aligned}$$

Q11. Donner la signification physique de τ et justifier que son ordre de grandeur est :

$$\tau(D) \approx \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}$$

On utilise en pratique un facteur correctif $\xi = 0{,}65$ tel que :

$$\tau(D) = \xi \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}$$

Calculer τ pour $D = 2{,}5$ mm.

Q12. On se place à $0 \leq t \leq \tau(D)$ et on souhaite que la réponse du disdromètre soit la plus rapide possible, sans oscillations.

a) Quelle doit être la relation entre les coefficients β et γ ?
On se place dans ce cas.

b) Le système étant à l'équilibre avant la chute de la goutte, montrer que la réponse du disdromètre s'écrit alors pour $0 \leq t \leq \tau$:

$$Z(t) = \frac{F_0}{k}\left(1 - \left(1 + \gamma\frac{t}{2}\right)e^{-\gamma t/2}\right)$$

c) Comment choisir γ pour réaliser $Z(\tau) = \dfrac{F_0}{k}$? Montrer alors que $Z(\tau)$ est proportionnel à D^α et donner la valeur de α.

d) Tracer l'allure de $Z(t)$ pour $0 \leq t \leq 2\tau$.

e) Comment la mesure de $Z(t)$ permet-elle de connaître D ?