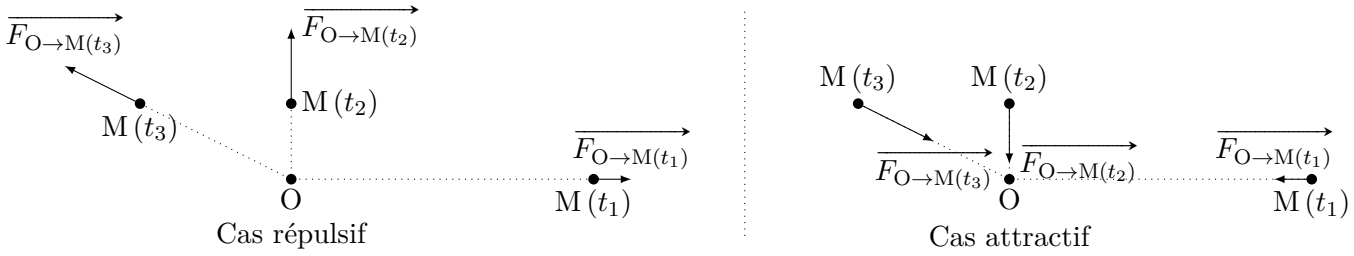
Méca 7 — Mouvement dans un champ de force central conservatif

1 Forces centrales conservatives

1.1 Force centrale

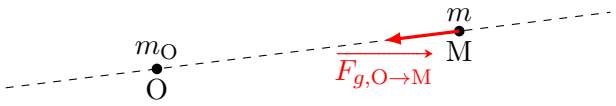
Définition. Une force $\vec{F}$ est dite centrale s'il existe un point fixe O (par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$) tel que $\vec{F}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ quelque soit la position de M. O est appelé centre de force.



Exemples :

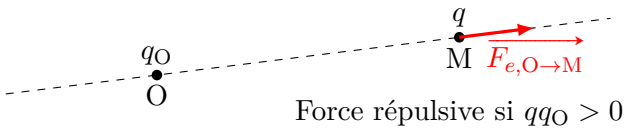
— Force d'attraction gravitationnelle vers un point fixe :

$$\overrightarrow{F_{g,\mathrm{O}\to\mathrm{M}}} = -\mathcal{G}\frac{m_{\mathrm{O}}m}{r^3}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\mathcal{G}\frac{m_{\mathrm{O}}m}{r^2}\vec{u_r}$$



— Force coulombienne (électrostatique) :

$$\overrightarrow{F_{e,\mathrm{O}\to\mathrm{M}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_{\mathrm{O}}}{r^3}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_{\mathrm{O}}}{r^2}\vec{u_r}$$



Force répulsive si $qq_{\mathrm{O}} > 0$

1.2 Force centrale conservative

On se dote des coordonnées sphériques de centre O. Par définition d'une force centrale, on peut écrire :

$$\vec{F} = F(\mathrm{M})\vec{u_r}$$

Si $\vec{F}$ est une force conservative, alors il existe une énergie potentielle telle que :

$$\delta W = -\mathrm{d}E_p \qquad \text{avec} \qquad \delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Or, en coordonnées sphériques $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\vec{u_r} + r\mathrm{d}\theta\vec{u_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{u_\varphi}$ donc :

$$\mathrm{d}E_p = -F(\mathrm{M})\mathrm{d}r$$

Ainsi, une variation de φ ou de θ ne cause pas de variation d'énergie potentielle. Seule une variation $\mathrm{d}r$ de r fait varier l'énergie potentielle. **Dans le cas d'une force centrale conservative, l'énergie potentielle ne dépendent que de** $r = \mathrm{OM}$**.** Par conséquent, la force F ne dépend également que de r.

Exemples :

— Interaction gravitationnelle. On a :

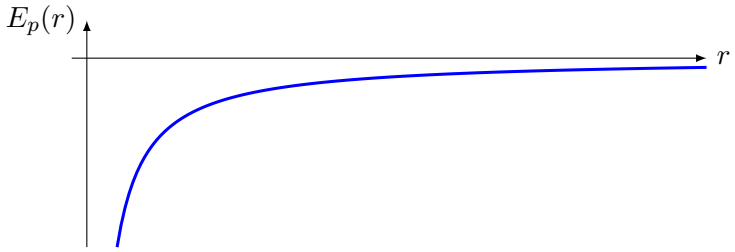
$$-\frac{\partial E_p}{\partial r} = -\mathcal{G}\frac{m_O m}{r^2}$$

Soit :

$$E_p(r) = -\mathcal{G}\frac{m_O m}{r} + C$$

On fixe par convention $E_p(+\infty) = 0$ ainsi :

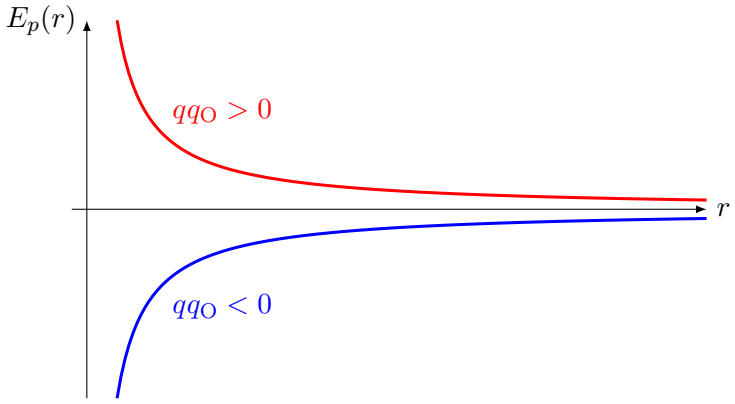
$$\boxed{E_p(r) = -\mathcal{G}\frac{m_O m}{r}}$$



— Interaction électrostatique.

$$-\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_O}{r^2}$$

$$\boxed{E_p(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_O}{r}}$$



2 Quantitées conservées

2.1 Conservation du moment cinétique

On considère une force centrale, de centre O. Le moment de cette force par rapport au point O est :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O\left(\vec{F}\right)} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

Si le point M n'est soumis qu'à $\vec{F}$, alors le théorème du moment cinétique en O appliqué au point M donne :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}_O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O\left(\vec{F}\right)} = \vec{0}$$

Lorsqu'un point M n'est soumis qu'à une force centrale, le moment cinétique par rapport au centre de force :

$$\overrightarrow{\mathcal{L}_O} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$$

se conserve.

Conséquences : Considérons le moment cinétique initial :

$$\overrightarrow{\mathcal{L}_0} = m\overrightarrow{\mathrm{OM}(0)} \wedge \overrightarrow{v(0)}$$

Si $\overrightarrow{\mathrm{OM}(0)}$ et $\overrightarrow{v(0)}$ ne sont pas colinéaires, alors le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{L}_0}$ définit une direction perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathrm{OM}(0)}$ et $\overrightarrow{v(0)}$ (c'est le résultat du produit vectoriel). Or, à tout instant :

$$\overrightarrow{\mathcal{L}_0} = m\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{v}$$

le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est orthogonal à la direction constante $\overrightarrow{\mathcal{L}_0}$ à tout moment : le mouvement se fait dans le plan contenant O et perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathcal{L}_0}$.

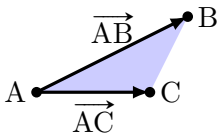
Si un point M n'est soumis qu'à une force centrale, le mouvement se fait dans un plan défini par $\overrightarrow{\mathrm{OM}(0)}$ et $\overrightarrow{v(0)}$.

Remarque. Dans le cas particulier où $\overrightarrow{\mathcal{L}_0}$ est le vecteur nul, d'après la conservation du moment cinétique, il reste nul à tout instant. Ainsi $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : le mouvement est rectiligne.

2.2 Loi des aires

Géométrie. L'aire d'un triangle ABC peut-être calculé à partir de la formule :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|$$



L'aire balayée du point de vue de O pendant $\mathrm{d}t$ (notée $\mathrm{d}\mathcal{A}$) est l'aire du triangle $\mathrm{OM}(t)\mathrm{M}(t+\mathrm{d}t)$ soit :

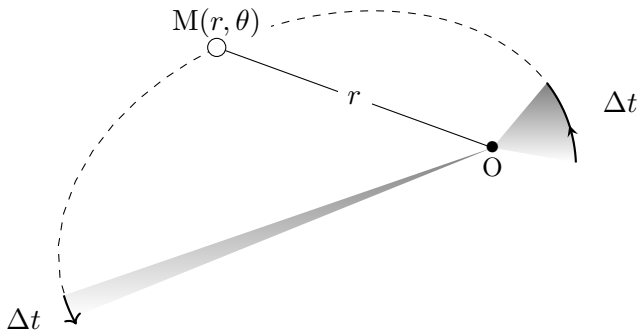
$$\mathrm{d}\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{O}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+\mathrm{d}t)}\right\|$$

Or $\overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+\mathrm{d}t)} = \overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{O}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}(t+\mathrm{d}t)} = \overrightarrow{\mathrm{OM}(t+\mathrm{d}t)} - \overrightarrow{\mathrm{OM}(t)} = \vec{v}\mathrm{d}t$ donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\left\|-\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)} \wedge \vec{v}\right\|\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{d}t}{2m}\left\|\overrightarrow{L_\mathrm{O}}\right\|\end{aligned}$$

Ainsi la vitesse aérolaire $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t}$ est constante.

Deuxième loi de Kepler. Lorsqu'un point M n'est soumis qu'à une force centrale, des aires égales sont balayées pendant un temps égal.



Constante des aires Comme le mouvement est plan, on se dote des coordonnées cylindriques centrées sur O. Le vecteur $\vec{u_z}$ indique la direction de $\overrightarrow{\mathcal{L}_O} = \mathcal{L}_O \vec{u_z}$ (vecteur perpendiculaire au plan du mouvement). On a :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u_r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

Soit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{L}_O} &= m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} \\ &= mr\dot{r}\vec{u_r} \wedge \vec{u_r} + mr^2\dot{\theta}\vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{L}_O} = mr^2\dot{\theta}\vec{u_z}}$$

Définition. La **constante des aires** est la grandeur :

$$C = r^2\dot{\theta}$$

Elle est une quantité constante tout au long du mouvement.

Cela implique que $\dot{\theta}$ est de signe constant : la vitesse angulaire ne change pas de signe donc la rotation se fait toujours dans le même sens.

2.3 Conservation de l'énergie mécanique

Considérons un point M soumis uniquement à une force centrale conservative. D'après le théorème de l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p$$

est une constante. Or en coordonnées polaires $v^2 = \dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2$:

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p$$

or $\dot{\theta} = C/r^2$ donc :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p$$

Définition. On appelle **énergie potentielle effective** et on note $E_{p,\text{eff}}$ la grandeur :

$$E_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p$$

On se ramène alors à l'étude d'un mouvement à une dimension, r (la distance au centre de force), avec en considérant l'énergie potentielle effective comme énergie potentielle.

Remarque. L'expression de l'énergie potentielle effective dépend des conditions initiales, à travers $C = r^2\dot{\theta}$.

3 Champ de force newtoniens

3.1 Définition

Définition. Un champ de force centrale est dit **newtonien** si on peut écrire :

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{u_r}$$

Si $k > 0$, la force est attractive, si $k < 0$, la force est répulsive.

Exemples :

— l'interaction gravitationnelle :

$$k = \mathcal{G} m_{\mathrm{O}} m$$

— l'interaction coulombienne :

$$k = -\frac{q_{\mathrm{O}} q}{4\pi\varepsilon_0}$$

L'énergie potentielle associée est :

$$E_p(r) = -\frac{k}{r}$$

L'énergie potentielle effective est alors :

$$\boxed{E_{p,\mathrm{eff}} = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r}}$$

3.2 Cas attractif

3.2.1 Retour sur le TP

Nous avons simulé un mouvement avec :

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - \mathcal{G} \frac{m M_{\mathrm{T}}}{r_0}$$

avec $v_0 = \alpha \sqrt{\mathcal{G} M_{\mathrm{T}} / r_0}$ soit :

$$E_m = \frac{1}{2} m \alpha^2 \mathcal{G} \frac{m M_{\mathrm{T}}}{r_0} - \mathcal{G} \frac{m M_{\mathrm{T}}}{r_0} = \mathcal{G} \frac{m M_{\mathrm{T}}}{r_0} \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1 \right)$$

— Si $\alpha = 0{,}5$:

$$E_m = -\mathcal{G} \frac{m M_{\mathrm{T}}}{8 r_0 / 7}$$

La simulation nous montre une oscillation temporelle de $r(t)$ entre r_0 et $0{,}14 r_0$ environ. La trajectoire est une ellipse de grand axe environ égal à $1{,}14 r_0$.

— Si $\alpha = 1$:

$$E_m = -\mathcal{G} \frac{m M_{\mathrm{T}}}{2 r_0}$$

La simulation nous montre que $r(t)$ est constante égale à r_0. La trajectoire est un cercle de rayon r_0.

— Si $\alpha = 1{,}1$:

$$E_m = -0{,}395 \mathcal{G} \frac{m M_{\mathrm{T}}}{r_0}$$

La simulation nous montre une oscillation temporelle de $r(t)$ entre r_0 et $1{,}55 r_0$ environ. La trajectoire est une ellipse de grand axe environ égal à $2{,}55 r_0$.

— Si $\alpha = 1{,}6$:

$$E_m = 0{,}28 \mathcal{G} \frac{m M_{\mathrm{T}}}{r_0}$$

La simulation nous montre une divergence de $r(t)$. La trajectoire est une hyperbole. Le satellite est en mouvement rectiligne uniforme loin de la Terre.

3.2.2 Analyse qualitative des trajectoires

Analysons la fonction $E_{p,\text{eff}}(r)$.

— Lorsque $r \to 0$, $E_{p,\text{eff}}$ tend vers $+\infty$ (le terme en $1/r^2$ est prépondérant).

— Lorsque $r \to +\infty$, $E_{p,\text{eff}}$ tend vers 0, par valeur négative (le terme en $1/r$ est prépondérant).

— $E_{p,\text{eff}}$ présente un minimum. En effet :

$$\frac{\mathrm{d}E_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2}m\left(-2\frac{C^2}{r^3}\right) + \frac{k}{r^2}$$

La dérivée s'annule pour :

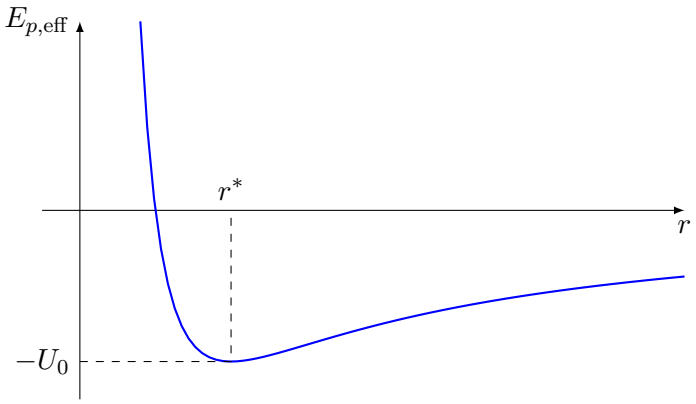
$$-mC^2 + kr = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{r^* = \frac{mC^2}{k}}$$

Pour cette valeur :

$$E_{p,\text{eff}}\,(r^*) = \frac{1}{2}m\frac{C^2k^2}{m^2C^4} - \frac{k^2}{mC^2} = -\frac{k^2}{2mC^2}$$

Notons $-U_0$ cette valeur.

Graphique :



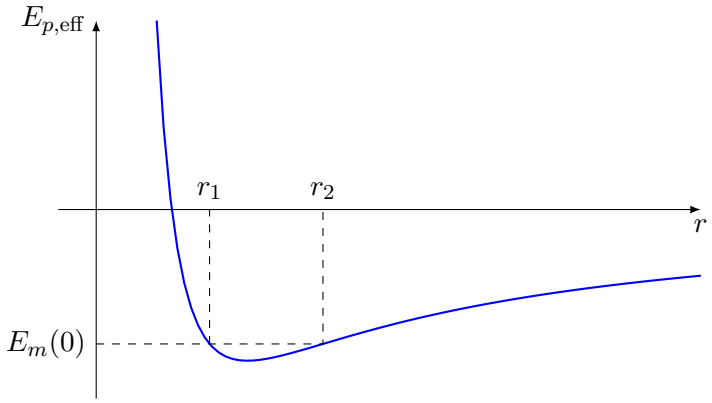
Analyse des trajectoires : Rappelons que :

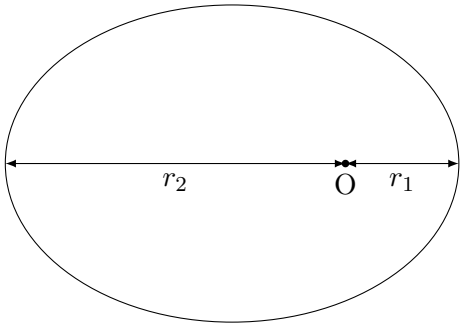
$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r) \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$$

— E_m est nécessairement plus grand que U_0.

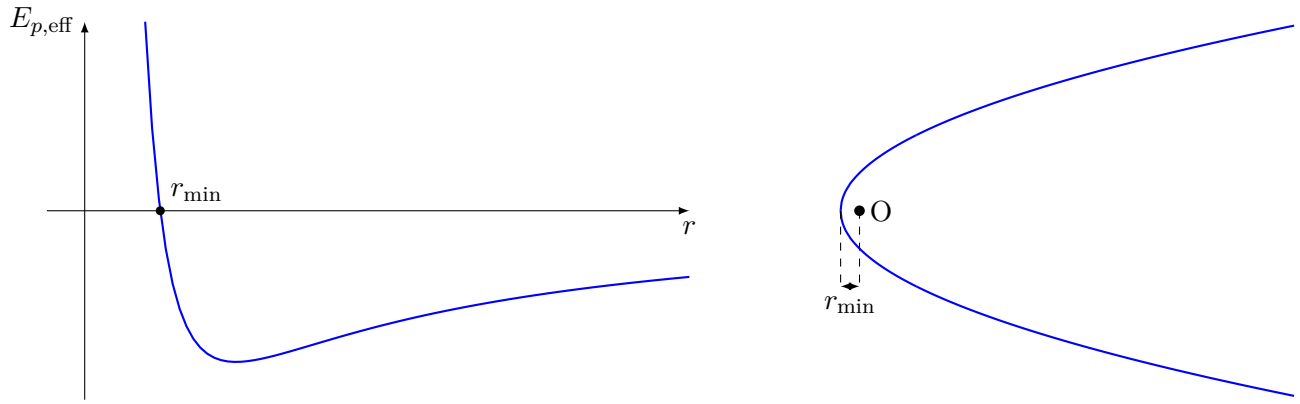
— $E_m(0) = -U_0$. Dans ce cas, la seule possibilité est $E_p = -U_0$ soit $r = r^*$ avec $\dot{r} = 0$. Nous avons un mouvement circulaire.

— $-U_0 < E_m(0) < 0$. La trajectoire est bornée car $r(t)$ est compris entre deux valeurs r_1 et r_2 : c'est un **état lié**. $r(t)$ oscille temporellement entre ces deux valeurs, solutions de l'équation $E_{p,\text{eff}}(r) = E_m(0)$. Nous avons vu en TP numérique que la trajectoire est elliptique dont le centre de force est un des foyers.

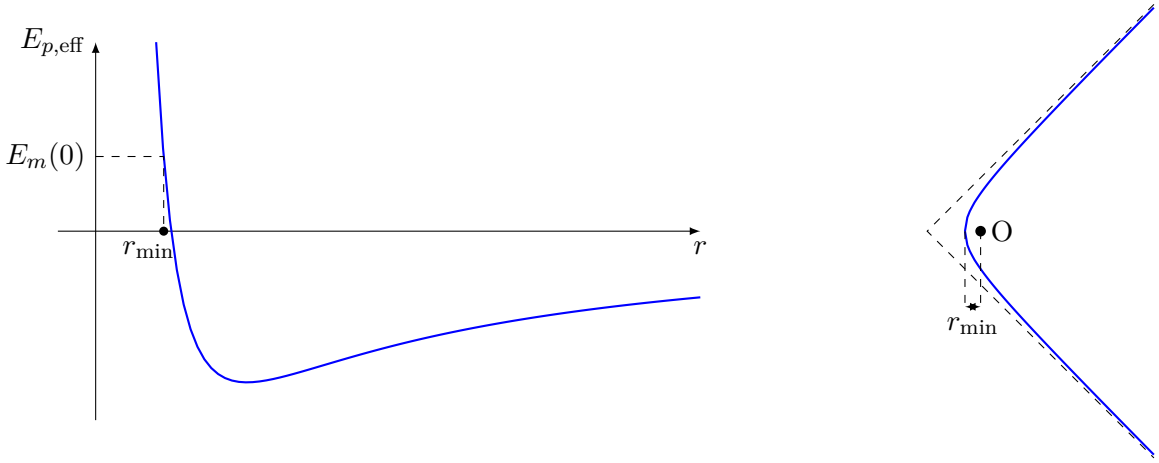




— $E_m(0) = 0$: la trajectoire n'est pas bornée : nous avons un **état de diffusion**. Dans ce cas particulier, elle est parabolique de foyer O.



— $E_m(0) > 0$: la trajectoire n'est pas bornée : nous avons un **état de diffusion**. Nous avons vu en TP numérique que la trajectoire est hyperbolique. La distance minimale d'approche $r_{\min}$ est la solution positive de l'équation $E_m(0) = E_{p,\text{eff}}(r)$. Loin du centre de force, M est en mouvement rectiligne à la vitesse $\sqrt{2E_m(0)/m}$.

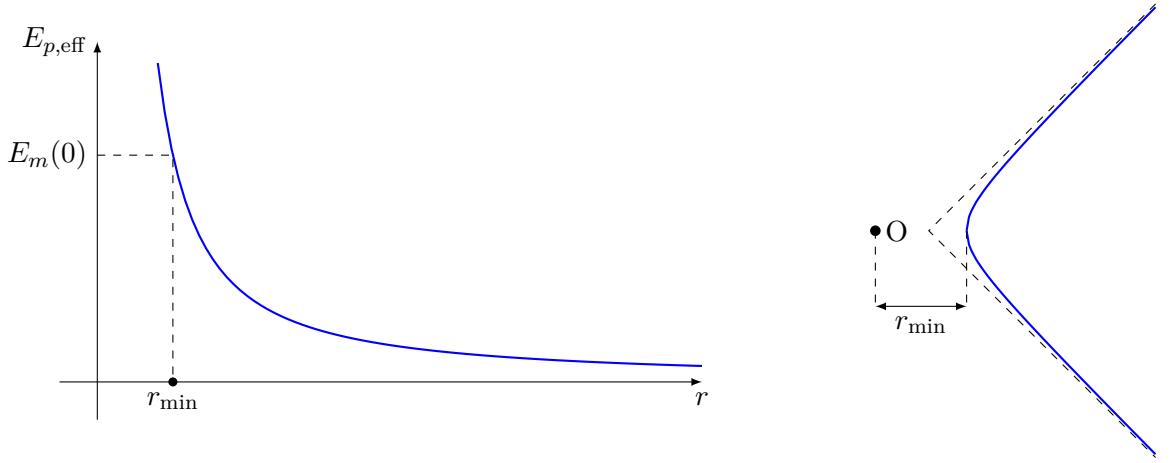


3.3 Cas répulsif

Dans ce cas :

$$E_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r}$$

avec $k < 0$. La trajectoire est hyperbolique dans tous les cas. La distance minimale d'approche $r_{\min}$ est la solution positive de l'équation $E_m(0) = E_{p,\text{eff}}(r)$.



4 Étude du mouvement elliptique

4.1 Lois de Kepler

Historique : Les lois de Kepler ont été établies par Johannes Kepler au début du XVII$^{\text{ème}}$ siècle (publiées en 1609 et 1619) à partir de relevés expérimentaux effectués par Ticho Brahe à la fin du XVI$^{\text{ème}}$ siècle.

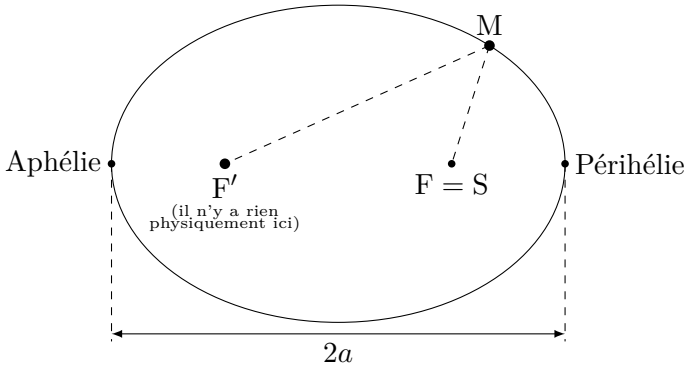
La première loi de Kepler précise la nature des trajectoires des planètes.

Première loi de Kepler. Dans le référentiel héliocentrique, les orbites des planètes sont des ellipses dont le centre du Soleil est l'un des foyers.

L'ellipse peut être définie comme l'ensemble des points M tels que

$$\mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = 2a$$

Les deux points F et F′ sont appelés foyers de l'ellipse, a est le demi-grand axe de l'ellipse.



Pendant sa trajectoire autour du Soleil, le point le plus proche est nommée **périhélie**, le point le plus éloignée **aphélie**. Pour un satellite terrestre, le centre de force est la Terre : on parle alors de **périgée** et **apogée**.

Nous avons démontré la deuxième loi de Kepler : c'est une conséquence de la conservation du moment cinétique.

Deuxième loi de Kepler. Pendant une durée donnée Δt, l'aide $\Delta\mathcal{A}$ balayée par le rayon joignant le centre du Soleil au centre de la planète est constante.

La troisième loi de Kepler relie le demi grand axe de l'orbite à sa période :

Troisième loi de Kepler. On note T la période de révolution et a le demi-grand axe de l'ellipse :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_{\mathrm{S}}}$$

Exemple

Calculer la période de révolution de Mars autour du Soleil. On donne pour la Terre $a = 150 \times 10^6$ km et pour Mars $a = 228 \times 10^6$ km.

On utilise la troisième loi de Képler :

$$\frac{T_{\mathrm{M}}^2}{a_{\mathrm{M}}^3} = \frac{T_{\mathrm{T}}^2}{a_{\mathrm{T}}^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_{\mathrm{S}}} \qquad \text{ainsi} \qquad T_{\mathrm{M}} = T_{\mathrm{T}}\sqrt{\frac{a_{\mathrm{M}}^3}{a_{\mathrm{T}}^3}} = 1 \text{ an } 319 \text{ jours}$$

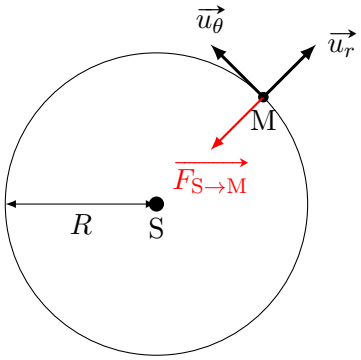
Remarque. Les satellites en orbite autour de la Terre vérifient :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_{\mathrm{T}}}$$

4.2 Étude du mouvement circulaire

❶ **De quoi parle-t-on ?** On étudie le mouvement d'une planète, assimilé à un point matériel M, dans le référentiel héliocentrique (centre du Soleil).

❷ **Schéma.**



❸ **Modélisation.** On repère le Soleil par le point S. On utilise une base cylindrique autour du Soleil $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$. Le mouvement est circulaire, on note R son rayon, ainsi :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\vec{u_\theta}$$

On note m la masse de la planète et M_{S} celle du Soleil.

❹ **Bilan des forces.** Sur la planète ne s'exerce que la force gravitationnelle :

$$\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{mM_{\mathrm{S}}}{R^2}\vec{u_r}$$

❺ **Deuxième loi de Newton.**

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

❻ **Équations scalaires.**

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G}\dfrac{mM_{\mathrm{S}}}{R^2} \\ mR\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

❼ **Répondre aux questions.** La deuxième équation donne $\ddot{\theta} = 0$, soit $\dot{\theta} = \text{cste}$. De plus :

$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_{\mathrm{S}}}{R^3}}}$$

Et ainsi, comme $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$:

$$\boxed{\vec{v} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_{\mathrm{S}}}{R}}\vec{u_\theta}}$$

À partir de :

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$$

où T désigne la période de révolution de la planète, on trouve :

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M_\mathrm{S}}{R^3}$$

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_\mathrm{S}}}$$

C'est la troisième loi de Kepler.

Énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}M_\mathrm{S}m}{r}$$

Donc :

$$E_m = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{S}}{R} - \frac{\mathcal{G}M_\mathrm{S}m}{R}$$

$$\boxed{E_m = -\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{S}m}{2R}}$$

Généralisation. Pour une ellipse de demi-grand axe a, on peut montrer que :

$$\boxed{E_m = -\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{S}m}{2a}}$$

L'astuce est de poser r_1 et r_2 comme les deux racines de l'équation $E_{p,\mathrm{eff}}(r) = E_m$, en n'oubliant pas que $a = r_1 + r_2$. La démonstration est hors-programme.

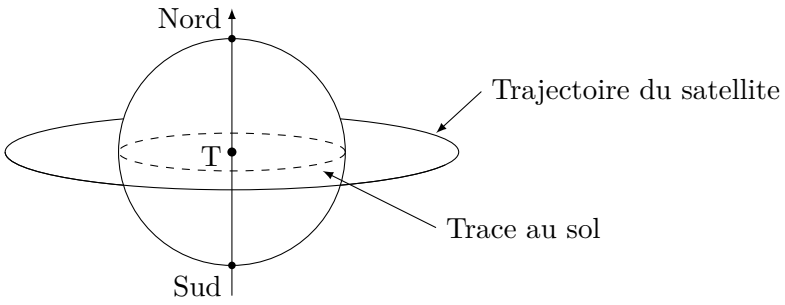
4.3 Applications

4.3.1 Les satellites géostationnaires

Définition. Un satellite géostationnaire est un satellite qui reste constamment au dessus d'un même point de la surface terrestre. Il apparaît donc immobile pour un observateur terrestre.

Pour cela, il doit respecter trois conditions.

1. **Le plan de l'orbite doit être le plan de l'équateur.**



   En effet, le mouvement est un plan passant par T. Le seul plan passant par T, tel que le satellite reste constamment à la surface du même point est le plan de l'équateur (schéma).

2. **Le mouvement du satellite doit être synchrone avec la rotation terrestre autour de l'axe des pôles.**

Remarque. Jour sidéral et jour solaire.

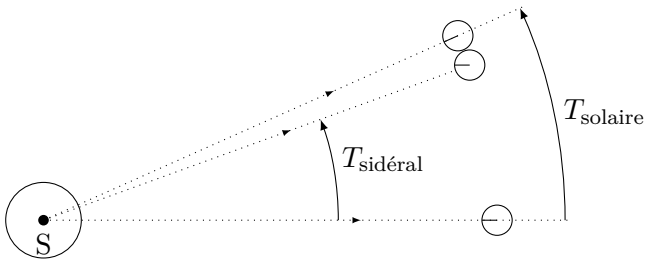
— le **jour sidéral** est la durée nécessaire pour une rotation complète de la Terre sur elle-même.

$$T_{\text{sidéral}} = 23\text{ h }56\text{ min }04\text{ s}$$

— le **jour solaire** est l'intervalle de temps séparant deux passages au zénith du Soleil en un endroit donné sur Terre :

$$T_{\text{solaire}} = 24\text{ h}$$

Ces deux notions diffèrent légèrement à cause de la révolution de la Terre autour du Soleil (les 3 min 56 secondes correspondent à $24\text{ h}/366{,}25$ – il y a $365{,}25$ jours solaires et $366{,}25$ jour sidéraux dans une année).
Sur le schéma ci-dessous, le petit trait joint le centre de la planète a un endroit à la surface de la Terre : lorsque la Terre fait un tour sur elle-même dans le référentiel héliocentrique, le Soleil n'est plus au zénith à cause de la révolution de la Terre autour du Soleil. Le Soleil est au zénith un peu plus tard.



La vitesse angulaire du satellite doit être :

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{\text{sidéral}}} = 7{,}2921 \times 10^{-5}\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

3. **Le mouvement doit être circulaire.**
   On sait que la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$ se conserve. Or $\dot{\theta}$ est fixé d'après ce qui précède. Donc r est fixé. On peut obtenir sa valeur grâce à la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{M_{\text{T}}\mathcal{G}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{R = \left(\frac{T^2 M_{\text{T}}\mathcal{G}}{4\pi^2}\right)^{1/3}}$$

   avec $T = T_{\text{sidéral}}$. On trouve $R = 42{,}2 \times 10^6$ m soit une altitude de 35 800 km. Une seule altitude est donc possible pour les satellites géostationnaires.
   La vitesse d'un satellite sur l'orbite géostationnaire est $R\dot{\theta} = 3{,}07\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

4.3.2 Les vitesses cosmiques

Vitesse de satellisation minimale.

Définition. La première vitesse cosmique, ou **vitesse de satellisation minimale**, est la vitesse minimale à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir le placer en orbite autour de la Terre.

L'énergie mécanique d'un objet lancé au niveau au niveau du sol est :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}mM_{\text{T}}}{R_{\text{T}}}$$

L'énergie mécanique d'un objet en orbite à une altitude h est :

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}M_{\text{S}}M_{\text{T}}}{2\,(R_{\text{T}}+h)} > -\frac{\mathcal{G}M_{\text{S}}M_{\text{T}}}{2R_{\text{T}}}$$

La vitesse v_c correspond donc à :

$$\frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{\mathcal{G}mM_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}} = -\frac{\mathcal{G}mM_\mathrm{T}}{2R_\mathrm{T}}$$

$$\boxed{v_c = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}}} = 7{,}90 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Pour orbiter sur des altitudes plus élevées, il faut donner davantage de vitesse.

Vitesse de libération.

Définition. La seconde vitesse cosmique, ou vitesse de libération et notée v_lib, correspond à la vitesse minimale à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir l'éloigner définitivement de la Terre.

Pour éloigner définitivement l'objet de la Terre, il faut que son énergie mécanique soit nulle. Ainsi la vitesse v_lib correspond à :

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{lib}^2 - \frac{\mathcal{G}mM_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}} = 0$$

$$\boxed{v_\mathrm{lib} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}}} = 11{,}2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$$

4.4 Quelques idées sur les satellites

- La Lune est le seul satellite naturel de la Terre. Elle est située à 384 000 km en moyenne de la Terre et sa période de révolution est $T = 27$ jours 7 h 43 min.
- En orbite basse (entre 300 et 2 000 km d'altitude), il y a environ 10 000 satellites artificiels : d'imagerie (SPOT), d'espionnage, de météorologie ou de téléphonie par satellite. C'est aussi l'orbite de l'ISS (station spatiale internationale à 400 km d'altitude) et des satellites Starlink (comptant pour la moitié du total).
- En orbite moyenne, il y a environ 100 satellites, en particulier les satellites GPS et Galileo à environ 20 000 km d'altitude (période de révolution de 12 h).
- En orbite géostationnaire, il y a environ 5 000 satellites, pour les télécommunications (télévision par satellite par exemple) ou certains satellites de météo (MeteoSat).
- D'autres orbites sont parfois utilisés (orbite géosynchrone : même altitude que l'orbite géostationnaire mais inclinée, orbite polaire, etc.)

Remarque. Du fait de la présence de l'atmosphère terrestre, il est difficile (et peu utile) d'amener un objet proche de la surface de la Terre à l'orbite géostationnaire. La vitesse nécessaire relève du régime hypersonique et l'objet serait détruit par les forces de friction. En pratique, un objet qui doit être lancé depuis la Terre à cette orbite, voire à la vitesse de libération (sonde spatiale) accélère progressivement en traversant les couches denses de l'atmosphère avant d'atteindre l'orbite terrestre basse puis on utilise des orbites elliptiques de transfert (voir TD).

4.5 Modèle de Bohr de l'atome

Le modèle de Bohr est un modèle historique semi-classique permettant de visualiser l'existence de transitions atomiques discrètes.

4.5.1 Principe et hypothèses

On considère le mouvement d'un électron en orbite (assimilé à un point matériel), au sens classique du terme, autour de l'électron.

Hypothèse de quantification. On suppose que le **moment cinétique** est quantifié :

$$\mathcal{L}_z = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

où n est un entier naturel non nul et h la constante de Planck : $h = 6{,}632 \times 10^{-34}$ J · s.

Hypothèses.

— On néglige le mouvement du proton par rapport à celui de l'électron. En effet, pour le proton soumis à la seule force électrostatique de la part de l'électron, le PFD s'écrit :

$$m_p\overrightarrow{a_p} = \overrightarrow{F_{e\to p}}$$

Pour l'électron :

$$m_e\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{F_{p\to e}}$$

Or, d'après la troisième loi de Newton $\overrightarrow{F_{e\to p}} = -\overrightarrow{F_{p\to e}}$ ainsi :

$$\frac{\|\overrightarrow{a_e}\|}{\|\overrightarrow{a_p}\|} = \frac{m_p}{m_e} \approx 1\,830$$

L'accélération de l'électron est bien supérieure à celle du proton.

— on néglige la force gravitationnelle. En effet :

$$\left\|\overrightarrow{F_g}\right\| = \mathcal{G}\frac{m_e m_p}{r^2} \qquad \text{et} \qquad \left\|\overrightarrow{F_e}\right\| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

Ainsi :

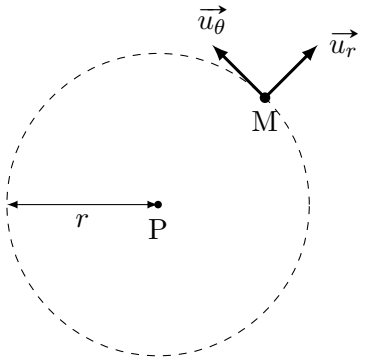
$$\frac{\left\|\overrightarrow{F_g}\right\|}{\left\|\overrightarrow{F_e}\right\|} = \frac{4\pi\varepsilon_0\mathcal{G}m_e m_p}{e^2} = 4{,}4 \times 10^{-40}$$

La force électrostatique est bien plus intense que la force gravitationnelle.

— on suppose le mouvement circulaire, on note R son rayon.

4.5.2 Mise en équation

Nous étudions le mouvement de l'électron, assimilé à un point matériel M, dans le référentiel du proton, supposé galiléen. On utilise une base cylindrique autour du proton $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$.



On suppose le mouvement circulaire de rayon R ainsi :

$$\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

La force subie par l'électron de la part du proton est :

$$\overrightarrow{F_{e,p\to e}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2}\overrightarrow{u_r}$$

Sur l'électron ne s'exerce que la force gravitationnelle. D'après le PFD projeté sur la base cylindrique :

$$\begin{cases} -m_e R\dot{\theta}^2 = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{R^2} \\ m_e R\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $\ddot{\theta} = 0$, soit $\dot{\theta} = \text{cste}$. La première nous donne :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R^3}}$$

Utilisons l'hypothèse de quantification pour déterminer les orbites accessibles :

$$\mathcal{L}_z = n\hbar$$

Or $\mathcal{L}_z = m_e R^2\dot{\theta}$ donc :

$$\mathcal{L}_z = m_e R^2\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R}} \qquad \text{donc} \qquad \mathcal{L}_z = \sqrt{\frac{m_e e^2 R}{4\pi\varepsilon_0}}$$

Ainsi, comme $\mathcal{L}_z = n\hbar$, les seules valeurs de R possibles sont les R_n pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{R_n = \frac{n^2\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2}}$$

L'énergie mécanique correspondante est :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m_e R^2\dot{\theta}^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Soit :

$$E_m = \frac{1}{2}m_e R^2\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R^3} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{E_m = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$

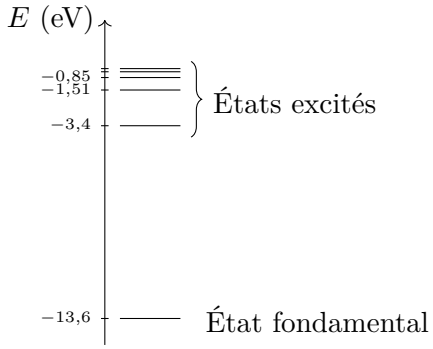
Finalement, en injectant la valeur de R_n, les énergies possibles sont :

$$\boxed{E_{m,n} = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}}$$

L'application numérique donne :

$$E_1 = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = 2{,}2 \times 10^{-18}\ \text{J} = 13{,}6\ \text{eV}$$

$$\boxed{E_m = -\frac{13{,}6\ \text{eV}}{n^2}}$$



Observation expérimentale : le spectre d'aborption de l'hydrogène contient les longueurs d'ondes données par la relation ($E_1 = -13{,}6$ eV) :

$$\lambda_{ij} = \frac{hc}{E_{ij}} = \frac{hc}{-\frac{E_1}{i^2} + \frac{E_1}{j^2}}$$