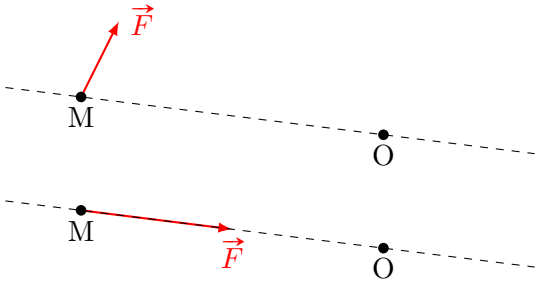
Méca 6 — Moment cinétique et bases de mécanique du solide

1 Moment cinétique du point

But : Introduire un nouvel outil en mécanique. Il n'y y aura rien de nouveau fondamentalement par rapport au PFD, mais on se focalise avec cette méthode sur les **mouvements de rotation**.

1.1 Moment d'une force

1.1.1 Par rapport à un point fixe



$\vec{F}$ tend à faire tourner M autour de O dans le sens horaire.

$\vec{F}$ ne cause aucune rotation.

Le moment d'une force est une grandeur visant à caractériser l'aptitude d'une force à créer un mouvement de rotation autour d'un point O.

Définition. On définit le moment d'une force $\vec{F}$ au point M par rapport à un point O le **vecteur** :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O\left(\vec{F}\right)} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

$\wedge$ est le produit vectoriel.

Rappel. Le résultat du **produit vectoriel** est un vecteur. $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$ et à $\vec{F}$. $\left(\overrightarrow{OM}, \vec{F}, \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right)$ constitue un tièdre direct. On pourra exprimer les composantes de $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$ dans une base orthonormale directe avant de calculer le produit vectoriel. $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ est nul si $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires.

1.1.2 Par rapport à un axe

Définition. Soit un point matériel M soumis à une force $\vec{F}$. Le moment de cette force par rapport à un axe orienté $(O, \vec{u_z})$ est :

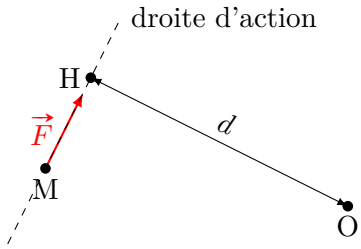
$$\mathcal{M}_z\left(\vec{F}\right) = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{u_z}$$

où O est un point de l'axe z : **cette quantité ne dépend pas de la position de** O **sur l'axe**.

En effet, soit deux points O et O′ sur l'axe $(O, \vec{u_z})$. On écrit :

$$\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{u_z} = \underbrace{\left(\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{u_z}}_{=0 \text{ car } \left(\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{F}\right) \perp \overrightarrow{OO'}} + \left(\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{u_z} = \left(\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{u_z}$$

Bras de levier. On repère la droite passant par M dirigée par $\vec{F}$: cette droite est nommée **droite d'action**. La distance de l'axe de rotation à cette droite d'action est nommée bras de levier.



En effet :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F} = \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{OH}} \wedge \vec{F}}_{\pm df\vec{u_z}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{HM}} \wedge \vec{F}}_{\vec{0}}$$

Le sens de rotation est donné par la règle de de la main droite.

Méthode du bras de levier.

1. Repérer le point O de l'axe de rotation contenu dans le plan perpendiculaire à $\vec{u_z}$ passant par M ;
2. tracer le droite passant par M dirigée par $\vec{F}$;
3. calculer géométriquement d ;
4. identifier le sens de rotation avec la règle de de la main droite.

On peut bien entendu utiliser aussi le calcul du produit vectoriel après projection dans une base.

1.2 Moment cinétique

1.2.1 Par rapport à un point

Définition. Le moment cinétique d'un point matériel M, de masse m et de vecteur vitesse $\vec{v}$, par rapport à un point O est le **vecteur** :

$$\overrightarrow{\mathcal{L}_{\mathrm{O}}} = m\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{v}$$

$\wedge$ est le produit vectoriel. Cette grandeur dépend du référentiel.

Pour interpréter cette grandeur, on considère les coordonnées cylindriques autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$. La vitesse est $\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\omega\vec{u_\theta}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{u_r}$. Le moment cinétique de M en O est donc

$$\overrightarrow{\mathcal{L}_{\mathrm{O}}} = m\left(r\vec{u_r}\right) \wedge \left(\dot{r}\vec{u_r} + r\omega\vec{u_\theta}\right) = mr^2\omega\vec{u_z}$$

Le moment cinétique ne conserve une information que sur la rotation du système. Le moment cinétique traduit la « quantité de rotation » d'un point matériel. Si celui-ci est nul tout le temps, soit il n'y a pas de mouvement, soit le vecteur vitesse et le vecteur position sont colinéaires, et dans ce cas le mouvement est rectiligne.

Dans un référentiel galiléen, le théorème du moment cinétique stipule que :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}_{\mathrm{O}}}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{\mathrm{O}}\left(\vec{F}\right)}$$

Démonstration :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}_{\mathrm{O}}}}{\mathrm{d}t} = m\underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{v}}_{\vec{v}\wedge\vec{v}=\vec{0}} + m\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

Ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}_{\mathrm{O}}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge (m\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \sum \vec{F} = \sum \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F}$$

1.2.2 Par rapport à un axe

Définition. Le moment cinétique d'un point matériel M, de masse m et de vecteur vitesse $\vec{v}$, par rapport à un axe orienté $(O, \vec{u_z})$ est :

$$\mathcal{L}_z = m\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\right) \cdot \vec{u_z}$$

où O est un point de l'axe z : **cette quantité ne dépend pas de la position de O sur l'axe**.

Signe : Si la rotation a lieu dans le sens donné par $\vec{u_z}$ via la règle de la main droite, alors $\mathcal{L}_z > 0$.

En reprenant la démonstration ci-dessus projetée sur $\vec{u_z}$:

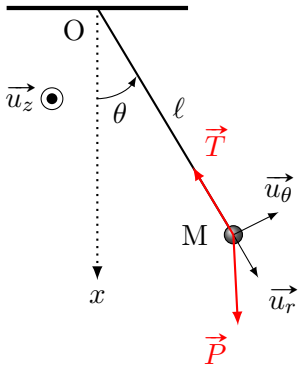
Le théorème du moment cinétique stipule que :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_z\left(\vec{F}\right)$$

1.3 Application au pendule simple

On reprend l'étude du pendule simple étudiée au chapitre M3. On choisit des coordonnées cylindriques.

- La masse est assimilée à un point matériel M de masse m.
- Origine : le point d'accroche du fil (centre de rotation du pendule).
- Repère : on considère la base polaire $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ centrée sur O ; θ dans le sens trigonométrique. $\vec{u_z}$ est perpendiculaire au mouvement et en sens cohérent avec θ.



Bilan des forces. Sur la masse s'exercent :

- le poids :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}$$

- la tension du fil :

$$\vec{T} = -T\vec{u_r}$$

On calcule les moments :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O\left(\vec{P}\right)} = (\ell\vec{u_r}) \wedge (mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}) = -mg\ell\sin\theta\vec{u_z}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O\left(\vec{T}\right)} = (\ell\vec{u_r}) \wedge (-T\,\vec{u_r}) = \vec{0}$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{M}_z\left(\vec{P}\right) = -mg\ell\sin\theta} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{M}_z\left(\vec{T}\right) = 0}$$

On aurait pu aussi utiliser la technique du bras de levier : pour $\vec{T}$, il est nul (la droite d'action passe par O) et pour $\vec{P}$, il vaut $\ell\sin\theta$ et le poids fait tourner dans le sens horaire.

On exprime ensuite le moment cinétique :

$$\overrightarrow{\mathcal{L}_O} = m\,(\ell\vec{u_r}) \wedge \ell\dot{\theta}\vec{u_\theta} = m\ell^2\dot{\theta}\vec{u_z}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_z = m\ell^2\dot{\theta}}$$

On applique le TMC :

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta + 0$$

Soit :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

Cette équation est l'équation du mouvement du pendule simple.

2 Mécanique du solide

2.1 Introduction

Un solide peut être vu comme un ensemble de points matériels à qui on peut appliquer le PFD. Mais contrairement à un fluide, ces points ne bougent pas indépendamment les uns des autres.

Définition. Un **solide indéformable** est un ensemble de points tels que la distance entre deux points quelconques soit constante.

Un solide peut avoir un mouvement complexe. On peut montrer néanmoins qu'on peut le décrire avec six variables : trois variables de position (les coordonnées du centre de gravité) et trois variables angulaires (nommées angles d'Euler). Dans le cadre du programme, on se limite à deux situations simples :

— la **translation** : tous les points ont le même vecteur vitesse. Dans ce cas, la connaissance du mouvement d'un des points permet de connaître le mouvement du solide.

On a déjà vu le cas de la translation rectiligne (véhicule en mouvement sur une route rectiligne), de la translation circulaire (cas de la grande roue), de la translation parabolique (cas d'un objet en chute libre sans mouvement de rotation initial).

— la **rotation autour d'un axe fixe** : tous les points ont un mouvement circulaire autour d'un même axe z.

C'est le cas d'un rotor de moteur. Attention, dans le cas d'une roue de voiture, l'axe de rotation n'est fixe que dans le référentiel de la voiture.

Dans ce cas, la vitesse de chaque point est

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

où r désigne la distance à l'axe de rotation, $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire.

2.2 Centre d'inertie d'un système de point

2.2.1 Définition

Définition. Le **centre de gravité** (ou **centre d'inertie**) G d'un ensemble de points matériel $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_n$, de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ est défini par :

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}$$

Il s'agit du barycentre des points du système, pondéré par leur masse.

Cette définition peut être étendue aux solides qui peuvent être vus comme un ensemble infini de points infiniment proches. Dans ce cas, la somme discrète devient une intégrale :

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{m}\int_{\text{solide}} \overrightarrow{\mathrm{OM}}\mathrm{d}m$$

Par exemple (hors-programme), pour un cube entre $(0,0,0)$ et (a,a,a) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{1}{m}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{a}(x\overrightarrow{u_x}+y\overrightarrow{u_y}+z\overrightarrow{u_z})\,\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= \frac{\rho}{m}\left(\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{a}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overrightarrow{u_x}+\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{a}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overrightarrow{u_y}+\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{a}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}\right)\\ &= \frac{1}{a^3}\left(\int_{x=0}^{a}a^2x\mathrm{d}x\overrightarrow{u_x}+\int_{y=0}^{a}a^2y\mathrm{d}y\overrightarrow{u_y}+\int_{z=0}^{a}a^2z\mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}\right)\\ &= \frac{1}{a^3}\left(\frac{a^4}{2}\overrightarrow{u_x}+\frac{a^4}{2}\overrightarrow{u_y}+\frac{a^4}{2}\overrightarrow{u_z}\right)=\frac{a}{2}\overrightarrow{u_x}+\frac{a}{2}\overrightarrow{u_y}+\frac{a}{2}\overrightarrow{u_z}\end{aligned}$$

On retrouve logiquement le centre du cube.
Reformulation. D'après la définition, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}$$

$$\overrightarrow{0}=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right)$$

Comme $\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{GO}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}=\overrightarrow{\mathrm{GM}_i}$, on peut aussi retenir :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{\mathrm{GM}_i}=\overrightarrow{0}}$$

Exemple

Le barycentre de deux masse m placées en A et en B.

On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{m\overrightarrow{\mathrm{AA}}+m\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{m+m}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

On place une masse $3m$ en A et m en B.

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{3m\overrightarrow{\mathrm{AA}}+m\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{3m+m}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

2.2.2 Quantité de mouvement d'un ensemble de points

Définition. Le vecteur quantité de mouvement d'un ensemble de points matériels $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\ldots,\mathrm{M}_n$, de masses $m_1,m_2,\ldots,m_n$ est défini par :

$$\overrightarrow{p}\,(\mathcal{S})=\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{v}\,(\mathrm{M}_i)$$

On a :

$$\vec{v}\,(\mathrm{G}) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{p}\,(\mathcal{S})}$$

On a montré que :

$$\boxed{\vec{p}\,(\mathcal{S}) = m_{\mathrm{tot}}\,\vec{v}\,(\mathrm{G})}$$

La quantité de mouvement d'un ensemble de point est la quantité de mouvement d'un point matériel placé en G, de masse m_{tot} : du point de vue de la quantité de mouvement, tout se passe comme si la masse était concentrée en G.

2.2.3 Théorème de la résultante cinétique

Considérons pour l'exemple un système de deux points M_1 et M_2, de masses m_1 et m_2, en mouvement dans un référentiel galiléen. On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}\,(\mathrm{M}_1)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F_{\mathrm{M}_2\to\mathrm{M}_1}} + \overrightarrow{F_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}_1}}$$

On décompose les forces agissant sur M_1 en deux catégories : celles exercées par M_2 et les autres, qualifiées d'extérieures. De même pour M_2 :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}\,(\mathrm{M}_2)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F_{\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2}} + \overrightarrow{F_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}_2}}$$

Ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}\,(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\overrightarrow{F_{\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2}} + \overrightarrow{F_{\mathrm{M}_2\to\mathrm{M}_1}}}_{=\vec{0}\text{ d'après la troisième loi}} + \overrightarrow{F_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}_1}} + \overrightarrow{F_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}_2}}$$

On peut généraliser ce résultat à un système de n particules :

Théorème de la résultante cinétique.

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}\,(\mathrm{G})}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{F_{\mathrm{ext}}}$$

Le mouvement du centre de gravité n'est affecté que par les forces extérieures au système. Ainsi, dans les chapitres précédents, lorsque nous avons assimilé le mouvement d'un solide à un point matériel, celui-ci était en **translation**. Le théorème de la résultante cinétique permet d'appliquer le PFD au centre de gravité :

$$m_{\mathrm{tot}}\frac{\mathrm{d}\vec{v}\,(\mathrm{G})}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{F_{\mathrm{ext}}}$$

La connaissance du mouvement du centre de gravité permet d'avoir celle de tous les points dans le cas particulier de la translation.

2.3 Mouvement d'un solide en rotation

2.3.1 Moment cinétique d'un solide en rotation

Le moment cinétique d'un ensemble de points matériels $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_n$, de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ est :

$$\mathcal{L}_z = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_z\,(\mathrm{M}_i)$$

Pour chaque point M_i en rotation autour de z ($\dot{\theta}$ est la même pour tous les points) :

$$\mathcal{L}_z = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta}$$

Définition. Le moment d'inertie d'un ensemble de points matériels $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_n$, de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$:

$$J_z = \sum_i m_i r_i^2$$

où r_i désigne la distance du point M_i à l'axe z.

Pour un solide, le calcul se fait à partir d'une définition intégrale $J_z = \int \mathrm{d}m r^2$.

Exemples : (voir lien)

- point matériel à distance R : $J_z = mR^2$;
- barre en rotation par rapport à son centre : $J_z = \dfrac{mL^2}{12}$;
- barre en rotation par rapport à son extrémité : $J_z = \dfrac{mL^2}{3}$;
- boule pleine par rapport à un diamètre : $J_z = \dfrac{2}{5} mR^2$.

Le moment cinétique d'un solide, en rotation autour d'un axe z fixe avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est :

$$\mathcal{L}_z = J_z \dot{\theta}$$

Visualisation du moment d'inertie Dans l'expérience de la chaise tournante (lien), le moment cinétique se conserve car le pivot n'exerce pas de moment, tout comme le poids. Quand la personne ramène deux masses de 1 kg proche de son corps, donc proche de l'axe de rotation, la vitesse angulaire augmente significativement. Cela est du à une baisse significative du moment d'inertie total (la distance à l'axe jouant au carré, l'effet est significatif même si les haltères sont beaucoup plus légers que la personne).

Plus la masse est excentrée, plus le moment d'inertie est grand et plus il est difficile de la mettre en rotation.

2.3.2 Moment des forces

Définition. Pour un solide, le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe orienté $(\mathrm{O}, \vec{u_z})$ est :

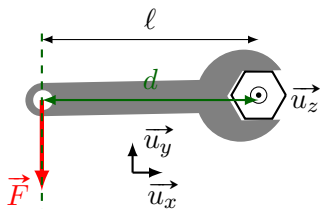
$$\mathcal{M}_z\left(\vec{F}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{u_z}$$

où O est un point de l'axe z et M le point d'application de la force.

Exemples :

Remarque. Dans chaque situation, le bras de levier est indiqué en vert.

- Calculer le moment de la force exercée sur une clé pour desserer un boulon, par rapport à l'axe du boulon.



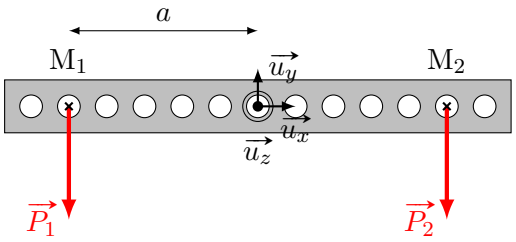
$$\vec{F} = -F\,\vec{u_y} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\ell\,\vec{u_x}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F} = \ell F\,\vec{u_x} \wedge \vec{u_y} = \ell F\,\vec{u_z}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_z\left(\vec{F}\right) = \ell F}$$

On vérifie que ce moment fait tourner dans le sens direct (règle du tire-bouchon ou de la main droite).

— Calculer les moments des forces par rapport à l'axe perpendiculaire au tableau dans la situation étudiée précédemment.



$$\vec{P_1} = -P_1\,\vec{u_y} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OM_1}} = -a\,\vec{u_x}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{P_1} = (-a) \times (-P_1)\ \vec{u_x} \wedge \vec{u_y} = P_1 a\,\vec{u_z}$$

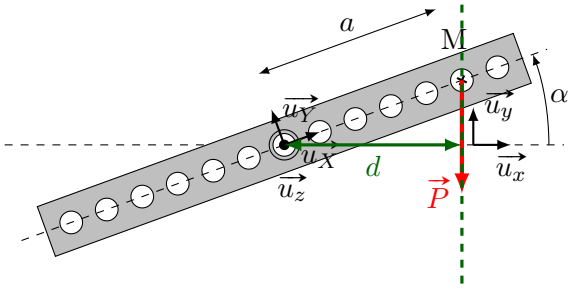
$$\boxed{\mathcal{M}_z\left(\vec{P_1}\right) = P_1 a}$$

On vérifie que ce moment fait tourner dans le sens direct. Ensuite :

$$\vec{P_2} = -P_2\,\vec{u_y} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OM_2}} = a\,\vec{u_x}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_z\left(\vec{P_2}\right) = -P_2 a}$$

— Faire le calcul dans le cas où la barre est inclinée.



On peut choisir de projeter le poids :

$$\vec{P} = -P\sin\alpha\,\vec{u_X} - P\cos\alpha\,\vec{u_Y} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = a\,\vec{u_X}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{P} = -Pa\sin\alpha\,\vec{u_X} \wedge \vec{u_X} - Pa\cos\alpha\,\vec{u_X} \wedge \vec{u_Y}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_z\left(\vec{P}\right) = -Pa\cos\alpha}$$

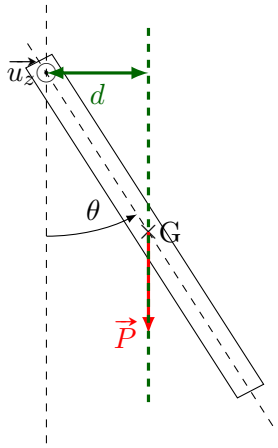
On peut aussi projeter le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans la base non inclinée :

$$\vec{P} = -P\,\vec{u_y} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = a\cos\alpha\,\vec{u_x} + a\sin\alpha\,\vec{u_y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{P} = -Pa\cos\alpha\,\vec{u_x} \wedge \vec{u_y} - Pa\sin\alpha\,\vec{u_y} \wedge \vec{u_y}$$

On retrouve logiquement le même résultat : $\boxed{\mathcal{M}_z\left(\vec{P}\right) = -Pa\cos\alpha}$

— Le moment du poids dans la situation du pendule pesant (on note $a = \mathrm{OG}$:



On peut choisir de projeter le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$:

$$\vec{P} = -mg\,\vec{u_y} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = a\sin\theta\,\vec{u_x} - a\cos\theta\,\vec{u_y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{P} = -mga\sin\theta\,\vec{u_x} \wedge \vec{u_y} + mga\cos\theta\,\vec{u_y} \wedge \vec{u_y}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_z\left(\vec{P}\right) = -mga\sin\theta}$$

2.3.3 Théorème du moment cinétique

Le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation énoncé que :

Dans un référentiel galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{F_{\text{ext}}}\right)$$

Soit :

$$J_z\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{F_{\text{ext}}}\right)$$

On peut faire une analogie avec le principe fondamental de la dynamique :

Mécanique du point	m	$\vec{v}$	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{F}$	PFD
Solide en rotation	J_z	$\dot{\theta}$	$\mathcal{L}_z = J_z\dot{\theta}$	$\mathcal{M}_z$	TMC

2.3.4 Exemples de calculs de moments

2.3.5 Quelques cas particuliers

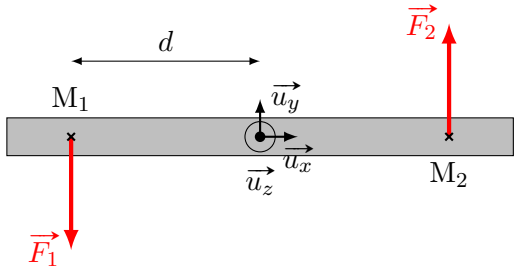
Couple de forces

Définition. Un couple de forces est un ensemble de force dont la somme est nulle mais le moment total ne l'est pas.

Le cas le plus simple est celui de deux forces opposées appliquées en des points différents.

Exemple

Clé en croix pour démonter une roue.



Si la force $\overrightarrow{F_1}$ est de même norme que $\overrightarrow{F_2}$ (juste de direction opposée), la résultante des forces est nulle. Alors que la somme des moments est :

$$\sum \mathcal{M}_z = F \times d + (-F) \times (-d) = 2Fd$$

Les deux forces participent à la mise en rotation.

Remarque. Les couples permettent la mise en rotation. Si la somme des forces s'appliquant sur le solide n'est pas nulle, alors celle-ci s'applique sur le centre de gravité du système et correspond à la résultante des forces. Résultante et moment du couple forment les deux composantes du torseur des actions vu en SII.

En physique, pour caractériser l'équilibre d'un solide soumis à plusieurs forces, on sera parfois amené à considérer l'équilibre des forces et l'équilibre des moments (voir DM).

Liaison pivot

Définition. Une liaison pivot d'axe z est une liaison qui restreint les possibilités de mouvement du solide à la seule rotation autour de l'axe z. Si elle est **parfaite**, elle n'exerce aucun moment selon l'axe z.

2.3.6 Énergie cinétique d'un solide en rotation

L'énergie cinétique d'un ensemble de points en rotation est :

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

avec $v_i = r_i\dot{\theta}$ soit :

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right)}_{J_z} \dot{\theta}^2$$

On reconnait le moment d'inertie.

L'**énergie cinétique** d'un solide en rotation à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour de z est :

$$E_c = \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2$$

J_z désigne son moment cinétique par rapport à l'axe z.

Le théorème de la puissance cinétique pour un solide en rotation stipule que :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_z \dot{\theta}$$

La quantité $\mathcal{M}_z\dot{\theta}$ correspond à la **puissance des actions mécaniques**.

On a en effet :

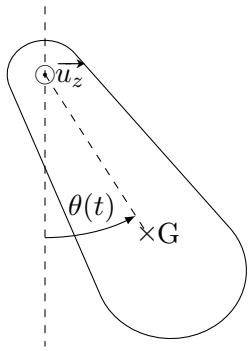
$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} J_z \left(2\dot{\theta}\ddot{\theta} \right) = J_z \dot{\theta}\ddot{\theta}$$

D'où le résultat d'après le TMC.

2.3.7 Le pendule pesant

Un pendule pesant est un objet pouvant osciller autour d'un axe z.

- ▷ On note J_z son moment cinétique par rapport à l'axe de rotation z.
- ▷ On suppose la liaison pivot parfaite : le moment de la liaison est nul. Il n'y a que le moment du poids.



Le poids s'applique au centre de gravité G, nous avons calculé son moment ci-dessus (page 8) :

$$\mathcal{M}_z\left(\vec{P}\right) = -mga\sin\theta$$

avec $a = \mathrm{OG}$. On écrit ensuite le théorème du moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{F_{\text{ext}}}\right)$$

Il faut alors exprimer le moment cinétique :

$$\mathcal{L}_z = J_z\dot{\theta} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z}{\mathrm{d}t} = J_z\ddot{\theta}$$

Donc :

$$J_z\ddot{\theta} = -mga\sin\theta$$
$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{J_z}\sin\theta = 0$$

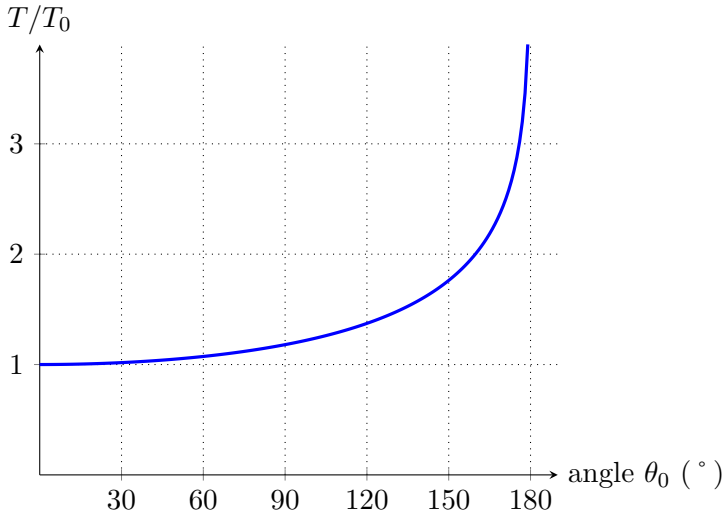
On met en évidence la pulsation des oscillations :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J_z}}$$

Il faut ensuite connaître J_z pour aller plus loin : cela impose de connaître la forme de l'objet. Au petits angles, la période est :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{mga}}$$

Dans l'approximation des petits angles, la période du pendule ne dépend pas de la masse, ni de l'angle initial. En réalité, aux grands angles, la période change et n'est plus celle que l'on a aux petits angles :



On peut observer l'animation d'un pendule aux grands angles : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/periode_pendule.php. Vous ferez le tracé de ce graphique en DM.

Remarque. Intégrale première du mouvement. On multiplie l'équation par $\dot{\theta}$:

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{mga}{J_z}\sin\theta\dot{\theta} = 0$$

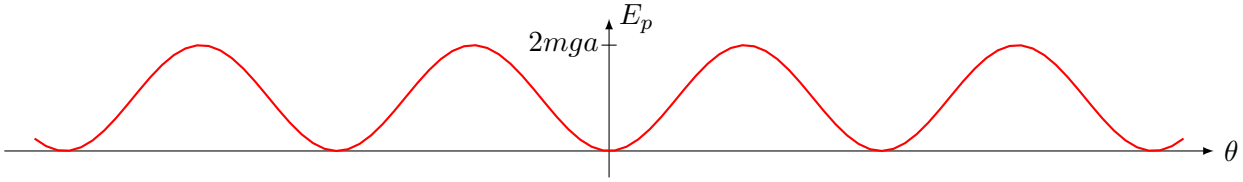
On l'intègre :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{mga}{J_z}\cos\theta = K$$

Cette quantité est une constante du mouvement, on la nomme intégrale première du mouvement. Elle indique ici la conservation de l'énergie mécanique.

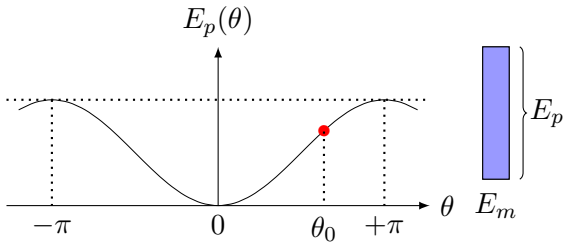
Si l'altitude est placée au point bas, on a :

$$Ep(\theta) = mgz(\theta) = mga(1-\cos\theta)$$

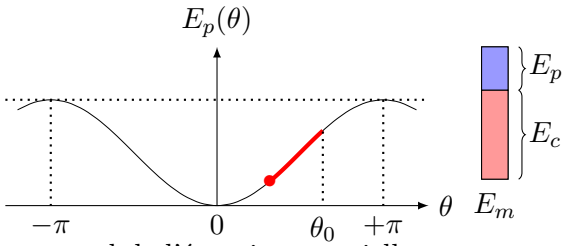


Les positions d'équilibre stables sont -2π, 0, 2π, ... et les positions d'équilibre instables sont $-\pi$, π, ...

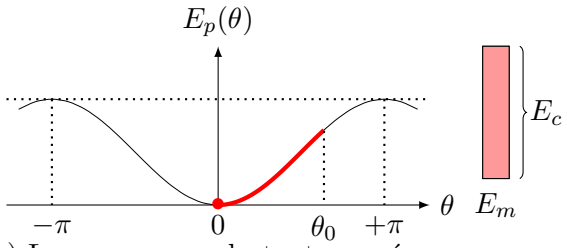
Cas $E_m < 2mga$: On observe une oscillation autour du point d'équilibre le plus proche. Nous avons vu que celle-ci était sinusoïdale au très petits angles (typiquement plus petit que 20°).



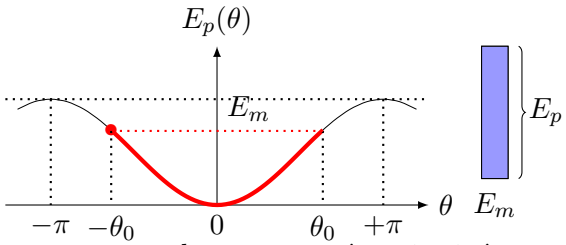
(a) État initial $\theta = \theta_0$: toute l'énergie est sous forme d'énergie potentielle, la vitesse est nulle.



(b) La masse perd de l'énergie potentielle en restant sur la courbe. L'énergie mécanique étant conservée, elle gagne de l'énergie cinétique et donc de la vitesse.



(c) La masse a perdu toute son énergie potentielle. Son énergie cinétique, et donc sa vitesse, est maximale.



(d) La masse a perdu toute son énergie cinétique et a maximisé son énergie potentielle. Elle a atteint l'angle maximal $-\theta_0$. Ensuite, la masse repart dans l'autre direction et oscille.

Cas $E_m > 2mga$: Le pendule tourne autour de l'axe de rotation. Lorsque le pendule arrive en $\theta = \pi$, l'énergie potentielle est maximale mais il lui reste encore de l'énergie cinétique. On observe donc des rotations. La vitesse n'est pas constante, elle est plus faible en haut qu'en bas (par conservation de l'énergie mécanique).