Méca 4 — Approche énergétique du mouvement

Rappels : énergie cinétique et travail d'une force constante

0.1 Énergie cinétique

Définition. L'**énergie cinétique** d'un point matériel M par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ est la grandeur :

$$E_c\left(\mathrm{M}/\mathcal{R}\right) = \frac{1}{2}mv\left(\mathrm{M}/\mathcal{R}\right)^2$$

Elle s'exprime en joules (J). L'énergie cinétique, comme la vitesse, dépend du référentiel.

0.2 Travail d'une force

À quelle condition une force appliquée à un objet fait-elle varier son énergie cinétique ?

— Quand un objet est jeté vers le haut, le poids le ralentit, donc fait diminuer son énergie cinétique.

— Quand un objet tombe, le poids l'accélère et fait donc augmenter son énergie cinétique.

— Lorsqu'un objet est posé sur un support, la réaction normale ne fait pas varier son énergie cinétique.

— Lorsqu'un objet freine sur un support horizontal, la réaction normale ne cause pas la variation de son énergie cinétique (c'est la réaction tangentielle qui le freine).

Le travail est une grandeur physique construite pour rendre compte de l'effet d'une force sur son énergie cinétique.

— En l'absence de déplacement, le travail doit être nul.

— Si la force est perpendiculaire au déplacement, le travail doit être nul.

— Si la force est dans le sens du déplacement, le travail doit être positif et maximal.

— Si la force est dans le sens opposé au déplacement, le travail doit être négatif (et minimale).

Au lycée, le travail W_{AB} d'une force constante $\vec{F}$ sur un chemin $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a été définit ainsi :

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

Il s'exprime en joules (J).

Remarque.

1. Si $W_{\mathrm{AB}} > 0$, le travail est dit **moteur**, si $W_{\mathrm{AB}} < 0$, le travail est dit **résistant**.
2. Si le travail est nul, soit la force est nulle, soit le déplacement est nul, soit les deux sont perpendiculaires.

0.3 Exemples de travaux

On peut calculer le travail de différentes façons :

— on projette les forces et le déplacement dans une base cartésienne. Si :

$$\vec{F} = F_x\overrightarrow{u_x} + F_y\overrightarrow{u_y} + F_z\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}$$

Le produit scalaire est :

$$\vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = xF_x + yF_y + zF_z$$

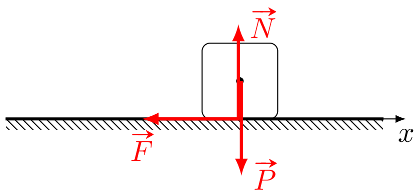
— de façon équivalente, avec α l'angle entre les vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$: $\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = \left\|\vec{F}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cos\alpha$

Application

On peut montrer qu'un objet soumis à une force de frottement solide était, pendant toute la durée du mouvement, soumis à $\vec{F} = -fmg\overrightarrow{u_x}$. Il parcourt pendant la phase de freinage

$$D = \frac{v_0^2}{2fg}$$

Calculer le travail de la force sur la distance AB qu'il parcourt. Le travail est-il moteur ou résistant ?



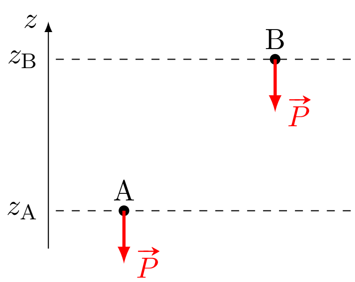
$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos(\pi) = -F \times AB$$

Ce travail est négatif : la force est résistante.

Sur la distance de freinage : $W_{AB}\left(\vec{F}\right) = -fmg \times \frac{v_0^2}{2fg} = -\frac{1}{2}mv_0^2$

Application

Calculer le travail du poids lors d'un déplacement.



$$W_{AB}\left(\vec{P}\right) = \vec{P}\cdot\overrightarrow{AB}$$

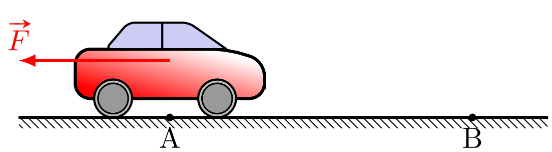
Dans la base cartésienne :

$\vec{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\overrightarrow{u_x} + (y_B - y_A)\overrightarrow{u_y} + (z_B - z_A)\overrightarrow{u_z}$

$$W_{AB}\left(\vec{P}\right) = -mg\,(z_B - z_A)$$

Application

On considère une voiture pour aller d'un point à un autre éloignés de 100 km. On suppose que l'on y va à vitesse constante. La force de frottement exercée par l'air est $\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S c_x v\vec{v}$. On donne $S = 3{,}07\ \mathrm{m}^2$, $c_x = 0{,}33$, $\rho = 1{,}3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Calculer le travail de la force. Faire l'application numérique pour $v = 50\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$, puis $80\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$.



$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = -F \times AB$$

Ce travail est négatif : la force est résistante.

— $v = 50$ km/h : $W_{AB}\left(\vec{F}\right) = -1{,}3\times10^7\ \mathrm{J} = 3{,}5\ \mathrm{kW\cdot h}$;

— $v = 80$ km/h : $W_{AB}\left(\vec{F}\right) = -3{,}3\times10^7\ \mathrm{J} = 9{,}0\ \mathrm{kW\cdot h}$.

Nous remarquons que dans certains cas, le travail ne dépend pas que du point de départ et du point d'arrivée, mais peut dépendre de la façon d'y aller (vitesse, chemin suivi).

De façon générale, le travail dépend du chemin suivi.

1 Puissance d'une force et théorème de la puissance cinétique

1.1 Définition

Physiquement, la puissance mécanique désigne la rapidité avec laquelle le travail W peut être effectué. La puissance moyenne peut ainsi être définie comme :

$$\mathcal{P}_m = \frac{W}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\Delta t}$$

pour un travail W fourni pendant Δt : ceci fait intervenir le vecteur vitesse moyenne $\overrightarrow{\mathrm{AB}}/\Delta t$.

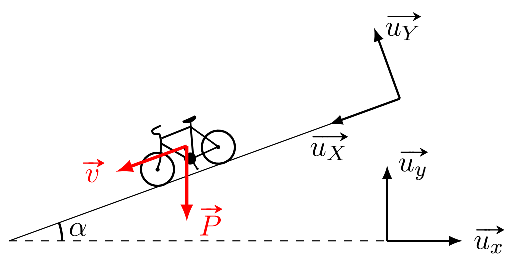
Définition. On définit, dans un référentiel donné, la **puissance instantanée de la force** $\vec{F}$ comme :

$$\mathcal{P}\left(\vec{F}\right) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Elle dépend du référentiel choisi et s'exprime en watts (W).

Application

Calculer la puissance du poids lors d'une descente sur une pente d'angle α.



On exprime le poids dans la base $(\overrightarrow{u_X}, \overrightarrow{u_Y})$:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= m\vec{g} = -mg\overrightarrow{u_y} \\ &= -mg\cos\alpha\overrightarrow{u_Y} + mg\sin\alpha\overrightarrow{u_X} \end{aligned}$$

Et la vitesse :

$$\vec{v} = v\overrightarrow{u_X}$$

Donc, dans le référentiel de la route :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left(\vec{P}\right) &= \vec{P} \cdot \vec{v} = (-mg\cos\alpha\overrightarrow{u_Y} + mg\sin\alpha\overrightarrow{u_X}) \cdot (v\overrightarrow{u_X}) \\ &= mgv\sin\alpha \end{aligned}$$

Dans ce cas, la puissance du poids est positive : le poids est moteur. Le cas de la montée revient simplement à inverser le sens de $\vec{v}$: le poids devient résistant.

On aurait aussi pu obtenir ce résultat en remarquant que l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{P}$ est $\pi/2 - \alpha$, puis utiliser $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$.

1.2 Théorème de la puissance cinétique

Théorème de la puissance cinétique. Dans un référentiel galiléen, pour un point matériel M :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}\left(\vec{F}\right)$$

Démonstration : Calculons $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left[\vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v}\right] \\ &= m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\vec{v} = \left(\sum \vec{F}\right) \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

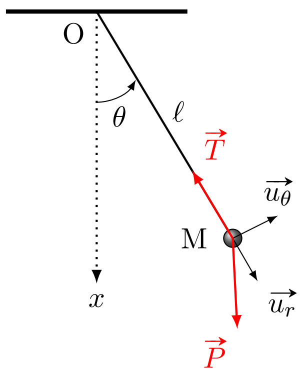
Application

Justifier que les frottements conduisent à une baisse de l'énergie cinétique.

Les frottements sont dans la direction opposée à la vitesse, donc leur puissance est négative. La dérivée de l'énergie cinétique étant égale à la somme des puissance des forces est donc négative : l'énergie cinétique décroît.

Application

Établir l'équation différentielle du pendule.



Le mouvement est circulaire donc la vitesse est $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$. Ainsi l'énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

Donc (on utilise la dérivée d'une fonction au carré) :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$\vec{v}$ et $\vec{T}$ sont perpendiculaires, l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{P}$ est $\pi/2 + \theta$:

$$\vec{T}\cdot\vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{P}\cdot\vec{v} = mg \times \ell\dot{\theta} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -mg\sin\theta\ell\dot{\theta}$$

On applique le théorème de la puissance cinétique :

$$m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0 - mg\sin\theta\ell\dot{\theta}$$

D'où, en simplifiant par $m\ell^2\dot{\theta}$:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

On retrouve bien l'équation différentielle du pendule.

1.3 Quand appliquer le TPC ?

Si le mouvement est sur une coordonnée (x, y ou z en coordonnées cartésiennes, θ en coordonnées cylindriques), il est pertinent d'utiliser le TPC. Sinon (chute libre par exemple), on en revient au PFD qui contient toute l'information. En effet, le PFD est une équation **vectorielle** tandis que le TPC est une équation **scalaire**, qui contient donc une information au lieu de trois.

2 Travail élémentaire et travail d'une force variable

Lorsqu'une force est variable le long du déplacement, on évalue le travail élémentaire sur un déplacement très petit, infinitésimal, du point M.

2.1 Déplacement élémentaire

Définition. Le **déplacement élémentaire** est le déplacement infiniment petit du point M pendant un temps infinitésimal $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}(t+\mathrm{d}t)} - \overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}$$

On le note aussi parfois $\mathrm{d}\vec{\ell}$.

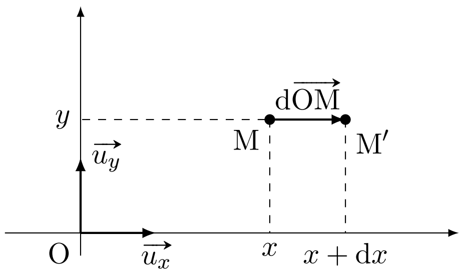
On a immédiatement :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{v}\mathrm{d}t$$

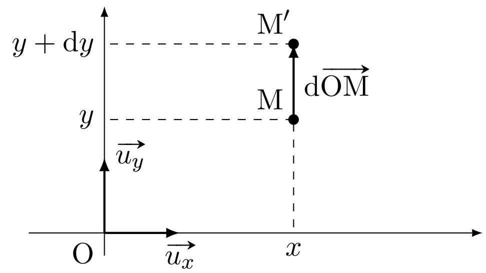
Ainsi, en coordonnées cartésiennes, on a :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}}$$

Le déplacement élémentaire correspond à la variation du vecteur position lorsque l'on fait varier les coordonnées de M de façon infinitésimale, autrement dit lorsque l'on passe de (x, y, z) à $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$.



Variation de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ entre M (x, y) et M′ $(x + \mathrm{d}x, y)$



Variation de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ entre M (x, y) et M′ $(x, y + \mathrm{d}y)$

Coordonnées cylindriques. D'après l'expression de la vitesse :

$$\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$$

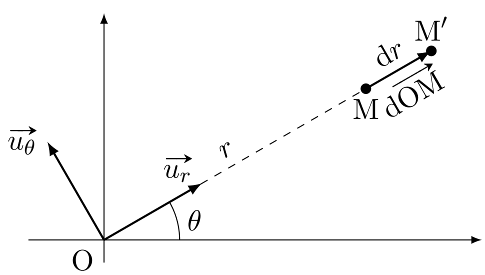
On en déduit :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}}$$

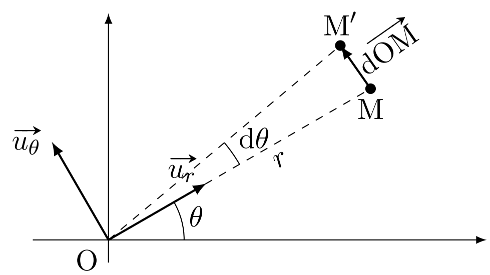
On peut le justifier par ailleurs ainsi :

— une variation de $\mathrm{d}r$ de la coordonnée r cause un déplacement de $\mathrm{d}r$ selon $\overrightarrow{u_r}$ (schéma de gauche) ;

— une variation de $\mathrm{d}\theta$ de la coordonnée θ cause un déplacement de $r\mathrm{d}\theta$ (longueur de l'arc de cercle) selon $\overrightarrow{u_\theta}$ (schéma de droite) ;



Variation de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ entre M (r, θ) et M′ $(r + \mathrm{d}r, \theta)$



Variation de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ entre M (r, θ) et M′ $(r, \theta + \mathrm{d}\theta)$

Remarque. On peut ainsi retrouver la formule

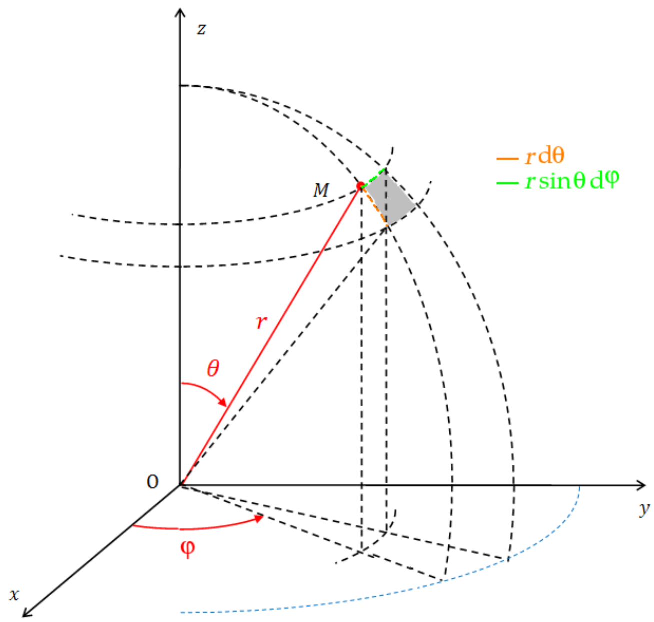
— du périmètre d'un cercle : on somme la longueur de tous les arcs de cercles de longueur $r\mathrm{d}\theta$. La somme étant continue, c'est une intégrale :

$$L = \int_{\theta=0}^{2\pi} R\mathrm{d}\theta = 2\pi R$$

— de l'aire d'un disque : on somme les aires de tous les rectangles infinitésimaux de côtés $\mathrm{d}r$ et $r\mathrm{d}\theta$:

$$\begin{aligned} S &= \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}r \times (r\mathrm{d}\theta) \\ &= \int_{r=0}^{R} \mathrm{d}r 2\pi r \\ &= 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2 \end{aligned}$$

Coordonnées sphériques.



— Une variation de $\mathrm{d}r$ de la coordonnée r indique un déplacement de $\mathrm{d}r$ selon $\overrightarrow{u_r}$;

— une variation de $\mathrm{d}\theta$ de la coordonnée θ indique un déplacement de $r\mathrm{d}\theta$ (longueur de l'arc de méridien) selon $\overrightarrow{u_\theta}$ (pointillés orange) car le rayon d'un méridien est r ;

— une variation de $\mathrm{d}\varphi$ de la coordonnée φ indique un déplacement de $r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$ (longueur de l'arc de parallèle) selon $\overrightarrow{u_\varphi}$ (pointillés verts) car le rayon d'un parallèle est $r\sin\theta$.

Ainsi, l'élément de déplacement correspondant à un mouvement $(\mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\varphi)$ est :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u_\varphi}}$$

Remarque. On peut ainsi retrouver la formule de :

— l'aire d'une sphère de rayon R : on somme les aires de tous les rectangles infinitésimaux de côtés $R\mathrm{d}\theta$ et $R\sin\theta\mathrm{d}\varphi$:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} (R\mathrm{d}\theta) \times R\sin\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi R^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \mathrm{d}\theta\sin\theta \\ &= 2\pi R^2 \times 2 = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

— et de son volume : on somme les volumes de tous les cubes infinitésimaux de côtés $\mathrm{d}r$, $r\mathrm{d}\theta$ et $r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$:

$$\begin{aligned} S &= \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} (\mathrm{d}r) \times (r\mathrm{d}\theta) \times (r\sin\theta\mathrm{d}\varphi) \\ &= \int_{r=0}^{R} \mathrm{d}r 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

Déplacements élémentaires.

— Coordonnées cartésiennes :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$$

— Coordonnées cylindriques :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$$

— Coordonnées sphériques :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}$$

2.2 Définition

On évalue le travail sur un déplacement infinitésimal dans le cas où la force $\vec{F}$ varie le long du déplacement :

Définition. Le **travail élémentaire** δW d'une force est :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Attention

Il ne faut pas confondre la notation δ avec la notation d. La notation δ fait référence au fait que le travail total dépend *a priori* du chemin suivi, et de la vitesse à laquelle on parcourt ce chemin, et non pas uniquement du point de départ et du point d'arrivée. On peut écrire :

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}E_c = E_c(\mathrm{B}) - E_c(\mathrm{A}) \qquad \text{ou} \qquad \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

Mais il est absurde d'écrire :

$$\cancel{\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W = W(\mathrm{B}) - W(\mathrm{A})}$$

Définition. Le **travail** d'une force sur un chemin AB est : $W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

2.3 Exemples

Poids : on écrit :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z} \qquad \text{et} \qquad \vec{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$$

Ainsi $\delta W = -mg\mathrm{d}z$ et :

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{P}\right) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W = -mg\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}z$$

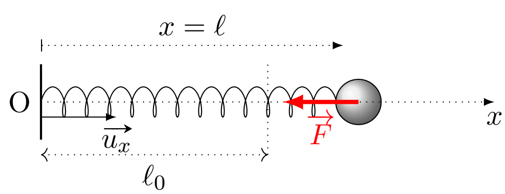
On retrouve logiquement le résultat :

$$\boxed{W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{P}\right) = -mg\left(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}\right)}$$

Le travail du poids entre un point A et un point B est (si z est vers la verticale vers le haut) :

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{P}\right) = mg\left(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}\right)$$

Force de rappel élastique :



on écrit :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z} \qquad \text{et} \qquad \vec{F} = -k\left(x - \ell_0\right)\overrightarrow{u_x}$$

Ainsi :

$$\delta W = -k\left(x - \ell_0\right)\mathrm{d}x$$

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W = -k\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \left(x - \ell_0\right)\mathrm{d}x = -k\left[\frac{1}{2}\left(x - \ell_0\right)^2\right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$$

$$\boxed{W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right) = -\frac{k}{2}\left(\left(x_{\mathrm{B}} - \ell_0\right)^2 - \left(x_{\mathrm{A}} - \ell_0\right)^2\right)}$$

Le travail de la force de rappel d'un ressort est (ℓ_A et ℓ_B désignent la longueur du ressort en A et B) :

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right) = -\frac{k}{2}\left(\left(\ell_{\mathrm{B}} - \ell_0\right)^2 - \left(\ell_{\mathrm{A}} - \ell_0\right)^2\right)$$

2.4 Théorème de l'énergie cinétique

On peut alors démontrer le TEC. On part du TPC :

$$\mathrm{d}E_c = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}\mathrm{d}t = \sum \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

On intègre :

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}E_c = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sum \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Or :

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}E_c = E_c\left(\mathrm{B}\right) - E_c\left(\mathrm{A}\right) = \Delta E_c$$

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sum \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \sum \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \sum \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W = \sum W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right)$$

On a bien montré :

Théorème de l'énergie cinétique. Dans un référentiel galiléen, pour un point matériel :

$$\Delta E_c = \sum W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right)$$

Application

Déterminer la vitesse d'impact d'un objet lâché sans vitesse d'une hauteur $h = 2$ m, si on néglige les frottements.

On étudie le mouvement de l'objet, assimilé à un point matériel M de masse m, dans le référentiel terrestre (à préciser). On considère le point A comme étant l'endroit d'où est lâché l'objet et le point B comme son point d'impact au sol.

Variation d'énergie cinétique L'énergie cinétique initiale est nulle car l'objet est lâché sans vitesse : $E_c(\mathrm{A}) = 0$. Au moment de l'impact, elle vaut $E_c(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}mv^2$ (v est l'inconnue).

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}mv^2$$

Travaux des forces Seul le poids s'applique, son travail est :

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{P}\right) = mg\left(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}\right) = mgh$$

où z désigne la varticale ascendante.

Conclusion On applique le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v = \sqrt{2gh} = 6{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

Application

On considère le freinage d'un objet ayant une vitesse initiale $\vec{v} = v_0\vec{u_x}$ par frottement solide. La force de frottement solide est $\vec{T} = -fmg\vec{u_x}$. On néglige les frottements fluides. Calculer la distance d'arrêt. On donne $v_0 = 2{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $f = 0{,}50$ et $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

On étudie le mouvement de l'objet, assimilé à un point matériel M de masse m, dans le référentiel terrestre (à préciser). On considère le point A comme étant l'endroit où est l'objet à l'instant initial et le point B comme son point final.

Variation d'énergie cinétique L'énergie cinétique initiale est simplement : $E_c(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}mv_0^2$. Au moment de l'arrêt, elle vaut $E_c(\mathrm{B}) = 0$.

$$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Travaux des forces Sur l'objet s'applique son poids $\vec{P}$, la réaction normale du support $\vec{N}$ et la force de freinage $\vec{T}$. Le poids et la réaction normale sont perpendiculaires au déplacement, leur travail est nul. Le travail de la force de freinage est :

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{T}\right) = -fmg\vec{u_x} \cdot D\vec{u_x} = -fmgD$$

Conclusion On applique le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -fmgD \qquad \text{soit} \qquad \boxed{D = \frac{v_0^2}{2fg} = 0{,}41\ \mathrm{m} = 41\ \mathrm{cm}}$$

2.5 Quand utiliser une approche énergétique ?

Si l'on veut connaître seulement une vitesse ou une distance à la fin d'un processus (chute, descente, freinage, etc.), les méthodes énergétiques sont souvent plus simples et plus rapides.

Si on cherche les équations horaires, un temps ou une trajectoire, il faut appliquer le PFD.

Dans tous les cas, ça donne le même résultat !

La méthode à appliquer est :

❶ **De quoi parle-t-on ?** Définition du système, du référentiel d'étude.

❷ **Schéma.**

❸ **Modélisation. Définir A et B.** Si nécessaire, définir un repère et son origine. Définir également les différentes notations nécessaires à la résolution.

❹ **Bilan des forces.** Les représenter sur le schéma.

❺ **Travaux des forces.** Exprimer le travail de **toutes** les forces.

❻ **Variation de l'énergie cinétique.**

❼ **Conclusion.**

3 Énergie potentielle et énergie mécanique

3.1 Forces conservatives et non-conservatives

Comme on l'a vu, le travail peut dépendre du chemin suivi. Dans le cas du poids ou de la force de rappel, nous voyons que le travail ne dépend que des coordonnées des points de départ et d'arrivée.

Définition. Une force est dite **conservative** si son travail ne dépend pas du chemin suivi / de la vitesse, mais uniquement des positions de A et B. Elle est dite **non-conservative** dans le cas contraire.

Exemple

Forces conservatives :

- le poids ;
- la force de rappel d'un ressort ;
- poussée d'Archimède ;
- force gravitationnelle ;
- force électrostatique.

Forces non-conservatives :

— frottement fluide : nous avons vu un exemple au paragraphe 1.3 ;

— frottement solide : elle dépend de la distance parcourue entre A et B : si on fait un détour pour aller de A à B, la valeur du travail sera plus élevée ;

— tension d'un fil ;

— réaction normale du support.

3.2 Énergie potentielle

Définition. On définit alors l'**énergie potentielle** associée à la force $\vec{F}$ à partir de :

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right) = -\left(E_p(\mathrm{B}) - E_p(\mathrm{A})\right) = -\Delta E_p$$

Exemples

— Énergie potentielle de pesanteur : nous avons démontré que :

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{P}\right) = -mg\left(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}\right)$$

Ainsi, en identifiant avec la définition ci-dessus, on obtient l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{p,p}(M) = mgz + C$$

L'énergie potentielle est toujours définie à une constante près. Cette constante importe peu (seule les variations d'énergie potentielle ont un impact). On retiendra :

L'énergie potentielle de pesanteur est (z étant la verticale ascendante) :

$$E_{p,p} = mgz$$

— Énergie potentielle élastique : nous avons démontré que :

$$\boxed{W = -\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\left(x_{\mathrm{B}} - \ell_0\right)^2 - \left(x_{\mathrm{A}} - \ell_0\right)^2\right)\right)}$$

Ainsi, en identifiant avec la définition ci-dessus, on obtient l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{p,\text{él}}(M) = \frac{1}{2}k\left(x - \ell_0\right)^2 + C$$

On retiendra :

L'énergie potentielle élastique est :

$$E_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2$$

3.3 Gradient et énergie potentielle

Soit $\vec{F}$ une force conservative. Si le déplacement n'a lieu que dans une direction (on fixe y et z), on peut considérer $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x}$ d'où :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = F_x \mathrm{d}x$$

Ainsi :

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} F_x \mathrm{d}x$$

Or, $\overrightarrow{F}$ étant conservative :

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\overrightarrow{F}\right) = -\Delta E_p = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}E_p$$

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} F_x \mathrm{d}x = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}E_p$$

Ceci étant vrai quelque soient A et B, on obtient :

$$F_x \mathrm{d}x = -\mathrm{d}E_p$$

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$$

On fait intervenir la dérivée de E_p par rapport à x, y et z étant fixés. On appelle cela la **dérivée partielle** de E_p par rapport à x.

> Soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables x, y et z. La dérivée partielle de f par rapport à x, notée
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x}$$
>
> est obtenue en dérivant f par rapport à x, les autres variables étant considérées constantes. Si $f(x, y, z) = x^2 y + z$ alors :
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 1$$

Ainsi :

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

De même, on montre que :

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

On relie ainsi les composantes de la force (F_x, F_y et F_z) à chacune des dérivées de l'énergie potentielle par rapport à la coordonnée correspondante.

Définition. On définit l'opérateur **gradient** d'une fonction $f(x, y, z)$ par :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

Lien avec l'énergie potentielle : On identifie alors :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_p}$$

Exemples :

— Énergie potentielle de pesanteur $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$ soit :

$$-\frac{\partial E_{p,p}}{\partial x} = 0 \qquad -\frac{\partial E_{p,p}}{\partial y} = 0 \qquad -\frac{\partial E_{p,p}}{\partial z} = -mg$$

$E_{p,p}$ ne dépend ni de x, ni de y, et peut s'écrire comme $mgz + C$.

— Énergie potentielle élastique $\overrightarrow{F} = -k\left(x - \ell_0\right)\overrightarrow{u_x}$ soit :

$$-\frac{\partial E_{p,p}}{\partial x} = -k\left(x - \ell_0\right) \qquad -\frac{\partial E_{p,p}}{\partial y} = 0 \qquad -\frac{\partial E_{p,p}}{\partial z} = 0$$

$E_{p,p}$ ne dépend ni de y, ni de z, et peut s'écrire comme $\frac{1}{2}k\left(x - \ell_0\right)^2 + C$.

3.4 Énergie mécanique

L'écriture du travail des forces conservatives comme la variation d'énergie potentielle permet d'écrire :

$$\Delta E_c + \Delta E_p = W\left(\sum \overrightarrow{F_{\mathrm{NC}}}\right)$$

Où les $\overrightarrow{F_{\mathrm{NC}}}$ désignent les forces non conservatives.

Définition. L'**énergie mécanique** est définie comme :

$$E_m = E_c + E_p$$

où toutes les énergies potentielles sont additionnées.

Théorème de l'énergie mécanique. Dans un référentiel galiléen, pour un point matériel :

$$\Delta E_m = \sum W_{\mathrm{AB}}\left(\overrightarrow{F_{\mathrm{NC}}}\right)$$

Cette formule n'est qu'une reformulation du théorème de l'énergie cinétique : simplement on peut considérer le travail d'une force conservative comme une énergie potentielle.

Théorème de la puissance mécanique. Dans un référentiel galiléen, pour un point matériel :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_{\mathrm{NC}}}\right)$$

Application

Exprimer l'énergie mécanique d'un skieur en haut et en bas d'une piste et retrouver sa vitesse.

L'énergie mécanique en haut de la piste est :

$$E_m(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 + mgz_{\mathrm{A}} = mgh$$

L'énergie mécanique en bas de la piste est :

$$E_m(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 + mgz_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}mv^2$$

Sans frottements, l'énergie mécanique se conserve ($W_{\mathrm{AB}}\left(\overrightarrow{N}\right) = 0$) donc :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \qquad \text{donc} \qquad \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

3.5 Utilisation d'un graphique d'énergie potentielle

Un graphique d'énergie potentielle est pratique pour déterminer qualitativement la trajectoire suivie.

3.5.1 Équilibres stables et instables

Considérons une force ne dépendant que d'une coordonnée x, dirigée selon $\overrightarrow{u_x}$. Développons l'expression de la force au voisinage d'un point x_0 :

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0) \times \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)$$

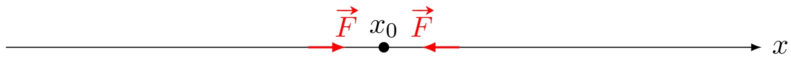
Comme $F = -\partial E_p / \partial x$:

$$F(x) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}(x_0) - (x - x_0) \times \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0)$$

On a une position d'équilibre si $F(x_0) = 0$. En effet, l'objet placé en x_0 sans vitesse initiale ne doit pas avoir d'accélération.

Stabilité :

— l'équilibre est stable si la force ramène le point vers sa position d'équilibre :

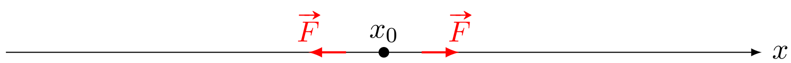


Il faut donc $F < 0$ si $x - x_0 > 0$. Or :

$$F(x) = \underbrace{-\frac{\partial E_p}{\partial x}(x_0)}_{0} - (x - x_0)\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0)$$

Il nous faut alors $\dfrac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0) > 0$. On a dans ce cas également $F > 0$ si $x - x_0 < 0$.

— l'équilibre est instable dans le cas constraire :



C'est le cas si $\dfrac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0) < 0$.

Définition. Une position d'**équilibre** est un point x_0 où la dérivée de l'énergie potentielle totale E_p s'annule :

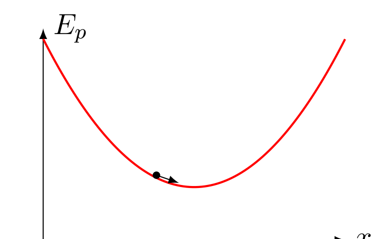
$$\frac{\partial E_p}{\partial x}(x_0) = 0$$

Elle est dite :

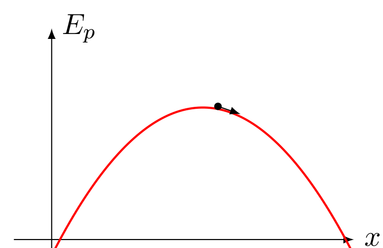
— **stable** si x_0 est un minimum (la dérivée seconde est positive) : $\dfrac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0) > 0$;

— **instable** si x_0 est un maximum (la dérivée seconde est négative) : $\dfrac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0) < 0$.

Illustration graphique :



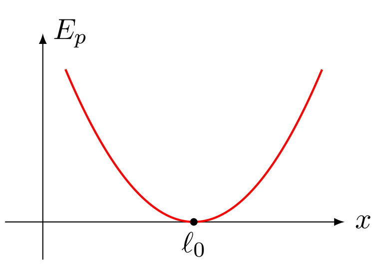
Équilibre stable



Équilibre instable

Application

Trouver la position d'équilibre d'un ressort. Cette position est-elle stable ou instable ?



On remarque graphiquement que la position d'équilibre est en $x = \ell_0$ est qu'elle est stable. On peut également le montrer par le calcul :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = k\,(x - \ell_0) \times 1$$

qui s'annule si $x = \ell_0$. La dérivée seconde est égale à k donc positive : l'équilibre est stable.

3.5.2 Analyse qualitative du mouvement

Pour un point matériel soumis seulement à des forces conservatives (et éventuellement des forces ne travaillant pas), il est possible de prévoir les zones accessibles au mobile et de décrire sommairement le mouvement. On a, d'après le théorème de l'énergie mécanique :

$$E_m(t) = E_m(0)$$

Donc :

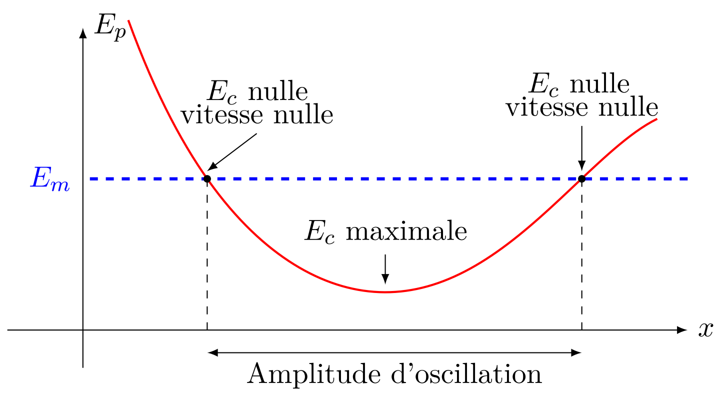
$$E_m(0) = E_c + E_p \geq E_p$$

car l'énergie cinétique est nécessairement positive.

- Dans un diagramme en énergie potentielle, seules les régions où $E_p \leq E_m(0)$ sont accessibles.
- Lorsque $E_p = E_m(0)$, $E_c = 0$: la vitesse est nulle.
- Lorsque E_p est minimal, E_c est maximale : la vitesse est maximale.

On peut distinguer plusieurs situations.

État lié La particule reste dans une zone bornée de l'espace et le mobile effectue des aller-retours périodiques autour de la position d'équilibre.



Étude générale du mouvement au voisinage d'un point d'équilibre stable On reprend le **développement** de l'énergie potentielle au voisinage du point x_0 :

$$F(x) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}(x_0) - (x - x_0) \times \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0)$$

Donc :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + (x - x_0)\frac{\partial E_p}{\partial x}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0)$$

Prenons par convention $E_p(x_0) = 0$. Par ailleurs, pour une position d'équilibre :

$$\frac{\partial E_p}{\partial x}(x_0) = 0$$

L'énergie mécanique est :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0)(x - x_0)^2$$

En l'absence de forces non-conservatives (ou si celles-ci ne travaillent pas) $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$ d'après le TPM ainsi :

$$\frac{1}{2}m \times (2\ddot{x}\dot{x}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0) \times 2\dot{x}(x - x_0)$$

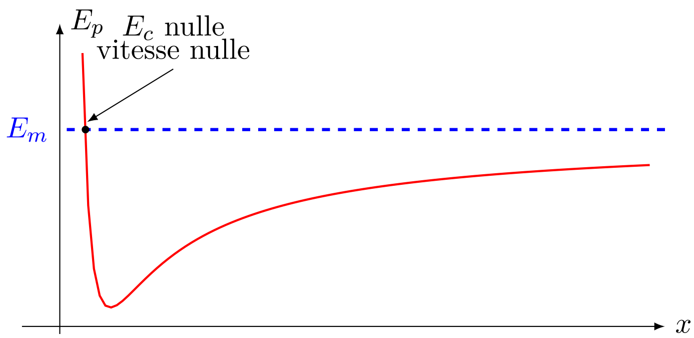
On a :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0)\,(x - x_0) = 0}$$

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique : le mobile oscille autour de la position d'équilibre à la pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0)}$$

État de diffusion La particule aura tendance à partir vers $x = +\infty$ sans jamais revenir : son mouvement n'est pas borné dans l'espace.



C'est le cas de certains corps célestes qui passent brièvement dans le système solaire avant de le quitter définitivement. Citons par exemple la comète d'Arend-Roland, passée à proximité du Terre en 1956 et qui ne devrait jamais revenir.