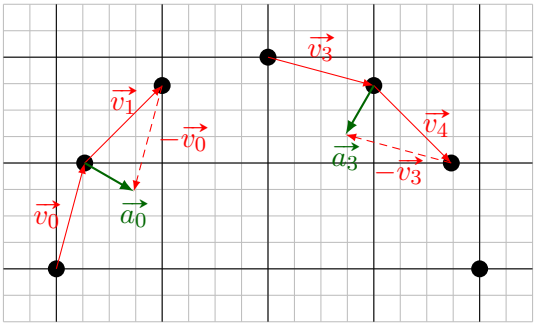
Méca 3 — Mécanique en coordonnées cylindriques

1 Cinématique

1.1 Étude cinématique d'un mouvement circulaire uniforme

Voici le pointage d'un mouvement circulaire uniforme, c'est-à-dire un mouvement à vitesse angulaire constante. Chaque point indique la position de l'objet à différents temps régulièrement espacés (chronophotographie).



Constat :

- Le vecteur vitesse est de norme constante, mais sa direction change.
- Le vecteur accélération est de norme constante, et pointe vers le centre de rotation.

> Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire. Le vecteur accélération est toujours dirigé vers l'intérieur des courbes.

1.2 Coordonnées polaires

On se limite à la description du mouvement dans le plan de rotation :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)} = x(t)\,\vec{u_x} + y(t)\,\vec{u_y}$$

Pour repérer un point M en coordonnées polaires, on donne :

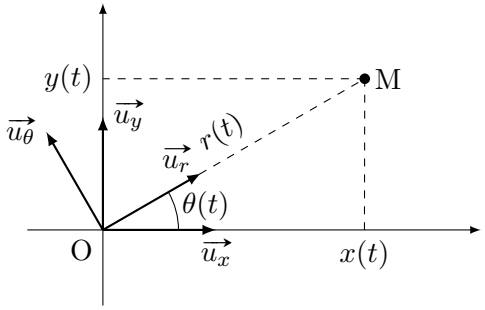
- sa distance à l'origine :

$$r(t) = \mathrm{OM}(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

- l'angle $\theta(t)$ entre $\vec{u_x}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Cet angle va de 0 à 2π (2π exclu).

On a alors :

$$x(t) = r(t)\cos\left(\theta(t)\right) \qquad \text{et} \qquad y(t) = r(t)\sin\left(\theta(t)\right)$$



Vecteurs de base. Pour exprimer tout vecteur du plan, on définit en coordonnées polaires :

— un vecteur $\overrightarrow{u_r}$ tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)} = r(t)\,\overrightarrow{u_r}$$

— un vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$ de sorte que $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ est une base orthonormée directe (la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ est la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ tournée de $\theta(t)$.

Remarque. r, θ, mais aussi $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ dépendent du temps.

On peut en effet écrire :

$$\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta(t))\ \overrightarrow{u_x} + \sin(\theta(t))\ \overrightarrow{u_y}$$
$$\overrightarrow{u_\theta} = -\sin(\theta(t))\ \overrightarrow{u_x} + \cos(\theta(t))\ \overrightarrow{u_y}$$

Remarque. On peut aussi vérifier que les deux vecteurs sont orthogonaux :

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\theta} = xx' + yy' = \cos\theta \times (-\sin\theta) + \sin\theta \times \cos\theta = 0$$

À retenir. En coordonnées polaires, dans le plan, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ s'expriment en fonction des vecteurs de la base cartésienne ainsi :

$$\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\ \overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\ \overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{u_\theta} = -\sin(\theta)\ \overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\ \overrightarrow{u_y}$$

1.3 Vitesse en coordonnées polaires

La définition de la vitesse est :

$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= \frac{\mathrm{d}\left(r\,\overrightarrow{u_r}\right)}{\mathrm{d}t} \\ &= \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Nous faisons donc intervenir la dérivée du vecteur $\overrightarrow{u_r}$.

Dérivée du vecteur $\overrightarrow{u_r}$. On commence par exprimer $\overrightarrow{u_r}$ dans la base cartésienne :

$$\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\ \overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\ \overrightarrow{u_y}$$

Donc, comme les vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ sont fixes dans le temps :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_x} + \frac{\mathrm{d}\sin(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_y} \\ &= -\dot{\theta}\sin(\theta)\ \overrightarrow{u_x} + \dot{\theta}\cos(\theta)\ \overrightarrow{u_y} \\ &= \dot{\theta}\left[-\sin(\theta)\ \overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\ \overrightarrow{u_y}\right]\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

Revenons au calcul de la vitesse en coordonnées polaires :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

1.4 Accélération en coordonnées polaires

L'accélération est :

$$\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$$

Donc, en utilisant l'expression de $\overrightarrow{v}$ démontrée ci-dessus ($(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$) :

$$\overrightarrow{a} = \ddot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t}$$

Dérivée du vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$. On procède comme pour $\overrightarrow{u_r}$. On écrit :

$$\overrightarrow{u_\theta} = -\sin(\theta)\ \overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\ \overrightarrow{u_y}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{d}\sin(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_x} + \frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_y}\\ &= -\dot{\theta}\cos(\theta)\ \overrightarrow{u_x} - \dot{\theta}\sin(\theta)\ \overrightarrow{u_y}\\ &= -\dot{\theta}\left[\cos(\theta)\ \overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\ \overrightarrow{u_y}\right]\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}}$$

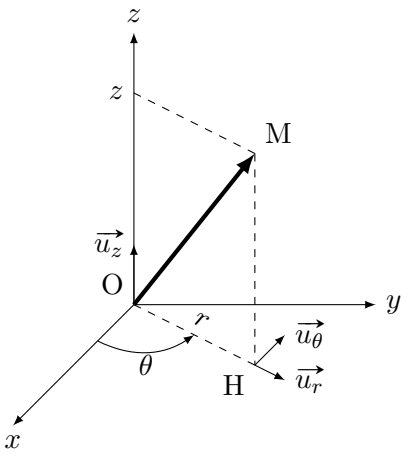
Finalement :

$$\overrightarrow{a} = \ddot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}}$$

1.5 Coordonnées cylindriques

Nous avons jusqu'ici parlé des coordonnées polaires, donc on s'est limité à une étude dans un plan. Pour décrire tout l'espace, on ajoute aux coordonnées polaires dans le plan (x, y) la coordonnée cartésienne z (z est l'axe de rotation).



Ainsi :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HM}} = r\,\vec{u_r} + z\,\vec{u_z}$$

À retenir.

— **Coordonnées :** r, θ et z

— **Vecteurs de base :** $\vec{u_r}$, $\vec{u_\theta}$, $\vec{u_z}$

$$\vec{u_r} = \cos(\theta)\ \vec{u_x} + \sin(\theta)\ \vec{u_y}$$

$$\vec{u_\theta} = -\sin(\theta)\ \vec{u_x} + \cos(\theta)\ \vec{u_y}$$

— **Vecteur position :**

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\vec{u_r} + z\,\vec{u_z}$$

— **Vecteur vitesse :**

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{z}\,\vec{u_z}$$

— **Vecteur accélération :**

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u_\theta} + \ddot{z}\,\vec{u_z}$$

Les formules de la vitesse et de l'accélération sont à connaître par cœur, mais il faut savoir aussi les retrouver. Ainsi, on se souviendra qu'il faut :

— exprimer les vecteur $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ dans la base cartésienne ;

— calculer leurs dérivées par rapport au temps ;

— en déduire la vitesse puis l'accélération.

1.6 Exemples de mouvements

1.6.1 Le mouvement circulaire

Définition. Un mouvement circulaire se fait dans un plan, à une distance R d'un point constante. On peut définir une base cylindrique où :

$$\begin{cases} r(t) = R \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Les dérivées $\dot{r}$ et $\ddot{r}$ restent nulles donc la vitesse est :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

L'accélération vaut quant à elle :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

1.6.2 Le mouvement circulaire uniforme

Définition. Un mouvement circulaire uniforme est un mouvement circulaire à vitesse angulaire constante. On peut définir une base cylindrique où :

$$\begin{cases} r(t) = R \\ \dot{\theta}(t) = \omega \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, le rayon r est constant donc $\dot{r}$ et $\ddot{r}$ sont nuls, puis comme $\dot{\theta} = \omega$ est constant, $\ddot{\theta} = 0$. Ainsi la vitesse est :

$$\vec{v} = R\omega\,\vec{u_\theta}$$

Et l'accélération vaut :

$$\vec{a} = -R\omega^2\,\vec{u_r}$$

Dans le cas du mouvement circulaire uniforme :
- ▷ Le vecteur vitesse est selon $\vec{u_\theta}$ et sa norme est constante et égale à $R\omega$.
- ▷ Le vecteur accélération pointe vers le centre et sa norme est constante et égale à $R\omega^2 = \dfrac{v^2}{R}$.

Remarque. La vitesse est constante en norme, mais le vecteur vitesse n'est pas constant (le mouvement n'est pas rectiligne uniforme).

1.7 Choix des coordonnées cylindriques ou cartésiennes.

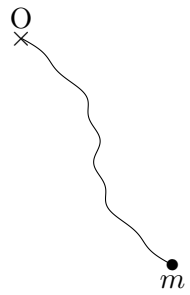
Lors d'un problème de mécanique, il faut définir un système de coordonnées. Le choix d'un système de coordonnées permet de simplifier les calculs.

Sauf proposition de l'énoncé, on utilisera les coordonnées cylindriques uniquement pour l'étude des mouvements de rotation. On utilisera les coordonnées cartésiennes sinon.

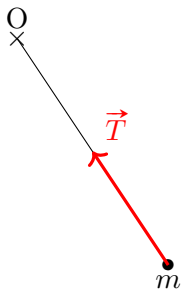
2 Le pendule simple

2.1 Tension d'un fil

Définition. La **tension du fil** $\vec{T}$ est la force exercée par un fil sur un objet suspendu au fil.
- — Si le fil est **détendu**, cette force est **nulle**.
- — Si le fil est **tendu**, la force $\vec{T}$ est colinéaire au fil et dirigée vers le point d'accroche O.



Fil détendu : pas de force.



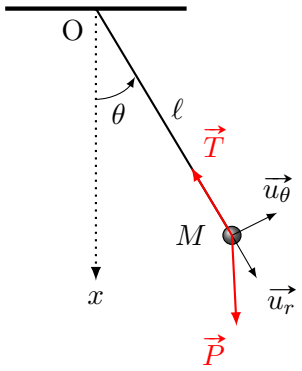
Fil tendu : la masse subit une force dirigée vers O.

Remarque. La norme de $\vec{T}$ dépend du mouvement et est a priori une inconnue du problème (variable).

2.2 Étude du pendule simple

❶ **De quoi parle-t-on ?** Le mouvement d'une masse suspendue à un fil, dans le référentiel de la salle de classe. La masse est écartée de sa position d'équilibre et lâchée sans vitesse initiale.

❷ **Schéma.**



❸ **Modélisation.** On choisit des coordonnées cylindriques.

- La masse est assimilée à un point matériel M.
- Origine : le point d'accroche du fil (centre de rotation du pendule).
- θ angle par rapport à la verticale, dans le sens trigonométrique.
- Repère : $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ base polaire centrée sur O.
- Instant initial : le moment où la masse est lâchée : $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.
- m est la mase de M, g l'accélération de la pesanteur, ℓ la longueur du fil.

❹ **Bilan des forces.**

- Le poids :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}$$

- La tension du fil :

$$\vec{T} = -T\vec{u_r}$$

❺ **Deuxième loi de Newton.**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

❻ **Équations scalaires.** Le mouvement est circulaire (non uniforme) de rayon ℓ donc :

$$\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\vec{u_r} + \ell\ddot{\theta}\vec{u_\theta}$$

On projette le PFD sur les coordonnées :

$$\begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \\ m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

❼ **Répondre aux questions.** On ne peut rien faire de la première équation, T étant une inconnue (dépendant du mouvement : de θ et de $\dot{\theta}$). La seconde équation est une équation différentielle sur θ :

$$m\ell\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0$$

Soit :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

Cette équation est l'équation du mouvement du pendule : c'est une équation **non-linéaire** du second ordre : nous ne savons pas la résoudre.

Par contre, dans l'approximation des petits angles $\sin\theta \approx \theta$ ainsi :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

C'est l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique. On met en évidence la pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Pour déterminer les constantes A et B, on utilise les conditions initiales.

$$\theta(0) = A \times 1 + B \times 0 \quad \text{donc} \quad \theta(0) = A$$

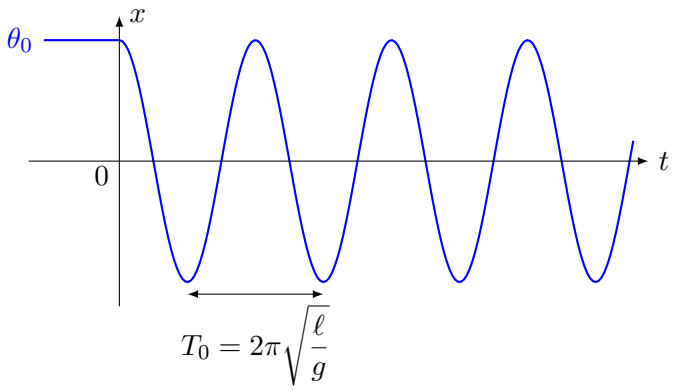
$$\dot{\theta}(0) = -A\omega_0 \times 0 + B\omega_0 \times 1 \quad \text{donc} \quad \dot{\theta}(0) = B\omega_0$$

Comme je n'ai pas donné de vitesse initiale au pendule et que l'angle initial est θ_0 : $A = \theta_0$ et $B = 0$. Finalement :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$$

La période de l'oscillation est :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$



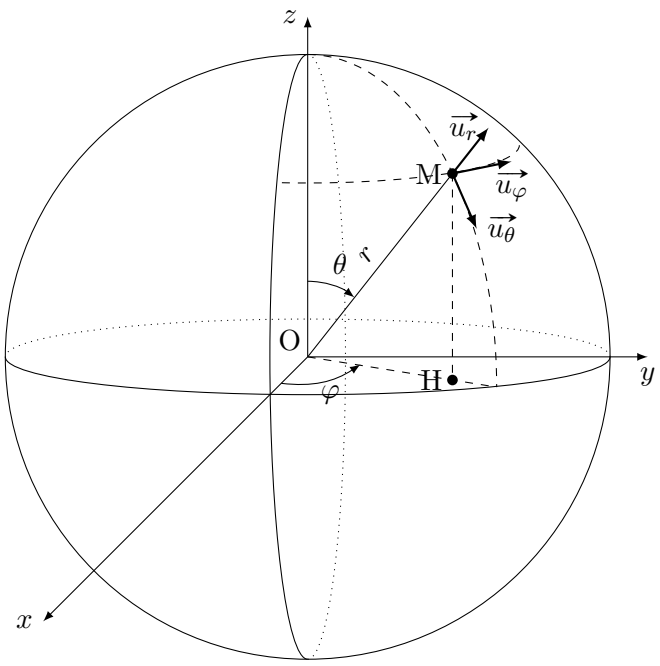
Exemple

Application numérique : nous avons mesuré $T_0 = 1{,}84$ s pour $L = 0{,}84$ cm :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad \text{donc} \qquad g = \frac{4\pi^2\ell}{T_0^2} = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Remarquons que dans l'approximation des petits angles, la période du pendule ne dépend pas de la masse, ni de l'angle initial. En réalité, aux grands angles (c'est-à-dire supérieurs à $\pi/4$ environ), la période change et n'est plus celle que l'on a aux petits angles. Nous en reparlerons ultérieurement.

3 Les coordonnées sphériques



Coordonnées :

— r est la distance au centre : $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

— θ est l'angle entre $\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$: il varie entre 0 et π et est nommé colatitude (la latitude λ est $|\pi/2 - \theta|$) :

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{OH}}{z} \qquad \text{soit} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$$

— φ correspond à l'angle θ des coordonnées cylindriques : il varie entre 0 et 2π et est nommé longitude :

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{si } x > 0$$

Exemple

Le lycée est situé à 48,89°N et à 2,51°E ainsi :

$$\theta = 41{,}11° \qquad \text{et} \qquad \varphi = 2{,}51°$$

— une courbe $\theta = \text{cte}$ est appelée **parallèle** : le périmètre d'un parallèle est $2\pi r \sin\theta$;

— une courbe $\varphi = \text{cte}$ est appelée **méridien** : le périmètre d'un méridien est $2\pi r$.

Réciproquement, on a $x = \mathrm{OH}\cos\varphi$ et $y = \mathrm{OH}\sin\varphi$ ainsi :

$$\boxed{x = r\sin\theta\cos\varphi} \quad , \quad \boxed{y = r\sin\theta\sin\varphi} \quad \text{et} \quad \boxed{z = r\cos\theta}$$

Vecteurs de base :

— $\overrightarrow{u_r}$ indique la direction du vecteur position :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\overrightarrow{u_r}}$$

— $\overrightarrow{u_\theta}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{u_r}$, dans le plan (OMH) dans le sens de θ.

— $\overrightarrow{u_\varphi}$ est le vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$ des coordonnées cylindriques.