Élec 6

Filtrage d'un signal périodique

1 Les signaux périodiques

1.1 Période

Définition. Un signal $s(t)$ est **périodique** si et seulement s'il existe une **période** T telle que, pour tout t :

$$s(t+T) = s(t)$$

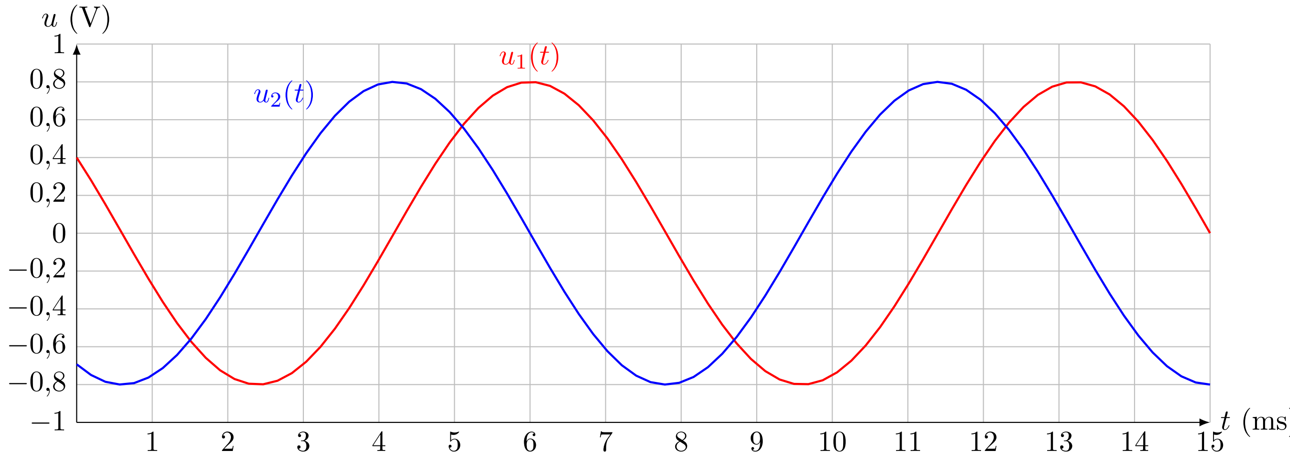
Exemple

Le signal $s(t) = A\sin(\omega t)$ a une période $T = 2\pi/\omega$.

Démonstration : $$s\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right) = A\sin\left(\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)\right) = A\sin(\omega t + 2\pi) = A\sin(\omega t)$$

1.2 Déphasage

Considérons les signaux u_1 et u_2 **synchrones** (même pulsation) ci-dessous :



Sur le signal ci-dessus, on repère la période du signal 1 :

$$T = 13{,}2 - 6{,}0 = 7{,}2 \text{ s}$$

Le moment $t_{\max,1}$ où le signal $u_1(t)$ a un maximum est tel que $\omega t_{\max,1} + \varphi_1 = 2k\pi$, de même, le moment $t_{\max,2}$ où le signal $u_2(t)$ a un maximum est tel que $\omega t_{\max,2} + \varphi_2 = 2k'\pi$; ainsi :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\left(k' - k\right)\pi + \omega\left(t_{\max,1} - t_{\max,2}\right)$$

On choisi $k' - k$ de sorte que $\varphi_2 - \varphi_1$ soit dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$. On peut repérer $t_{\max,1} = 6{,}0$ s et $t_{\max,2} = 4{,}2$ s si bien que :

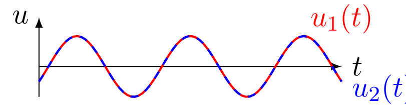
$$\omega\left(t_{\max,1} - t_{\max,2}\right) = \frac{2\pi}{7{,}2} \times 1{,}8 = \frac{\pi}{2}$$

On choisit alors $k' - k' = 0$ ainsi :

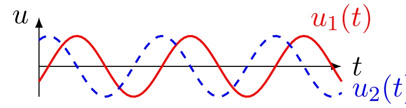
$$\boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}}$$

Définition.

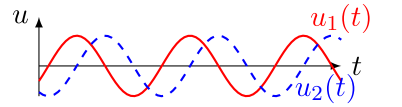
— $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$: u_2 est en **phase** avec u_1 ;



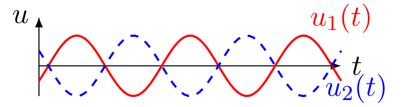
— $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$: u_2 est en **quadrature avance** sur u_1 ;



— $\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$: u_2 est en **quadrature retard** sur u_1 ;



— $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$: u_2 est en **opposition de phase** avec u_1.



Remarque.

— Pour une bobine :

$$\underline{U} = \mathrm{j}L\omega\underline{I} = L\omega e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\underline{I}$$

Ainsi, si $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$, alors :

$$u(t) = L\omega I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Dans une bobine, $u(t)$ est en **quadrature avance** sur $i(t)$.

— Pour un condensateur :

$$\underline{U} = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\underline{I} = \frac{1}{C\omega}e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\underline{I}$$

Ainsi, si $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$, alors :

$$u(t) = \frac{1}{C\omega}I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Dans un condensateur, $u(t)$ est en **quadrature retard** sur $i(t)$.

— Pour une résistance, $u(t) = Ri(t)$. Ainsi, si $u(t) = U\cos(\omega t)$, alors :

$$u(t) = RI_0 \cos(\omega t)$$

Dans une résistance, $u(t)$ est **en phase** avec $i(t)$.

1.3 Décomposition d'un signal périodique

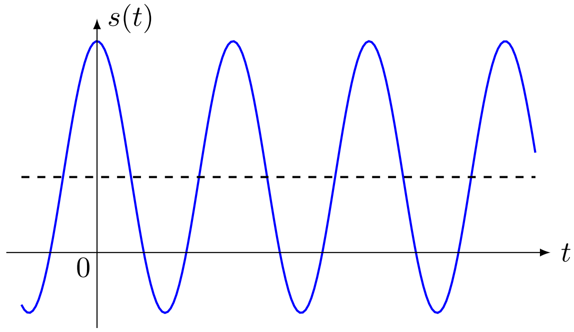
1.3.1 Valeur moyenne

Définition. On définit la **valeur moyenne** du signal périodique $s(t)$ par la relation

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\mathrm{d}t$$

Exemple

Considérons le signal $s(t) = C + A\cos(\omega t)$.



$$
\begin{aligned}
\langle s(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(C + A\cos\left(\omega t\right)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^T C\mathrm{d}t \;+\; \int_0^T A\cos\left(\omega t\right)\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(\left[Ct\right]_0^T \;+\; \left[\frac{A}{\omega}\sin\left(\omega t\right)\mathrm{d}t\right]_0^T\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(C\left(T-0\right) + \frac{A}{\omega}\left(\sin\left(\omega T\right) - \sin\left(\omega\times 0\right)\right)\right) = \frac{1}{T}\left(CT\right)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\langle s(t)\rangle = C}$ C'est la valeur autour de laquelle oscille $s(t)$.

Remarque importante. On peut souvent obtenir la valeur moyenne par simple lecture grpahique ou en analysant l'expression analytique de $s(t)$, sans revenir à sa définition.

1.3.2 Théorème de Fourier

Tout signal périodique se décompose comme une somme de fonctions sinusoïdales. Ainsi, un signal $s(t)$ de fréquence f s'écrit

$$s(t) = S_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \cos\left(2\pi i f t + \varphi_i\right)$$

où :

- S_0 la valeur moyenne du signal (ou composante continue) ;
- A_i et φ_i des coefficients dépendant du signal. Les différents coefficients A_i représentent le **spectre** du signal.

Spectre des signaux créneau et triangle

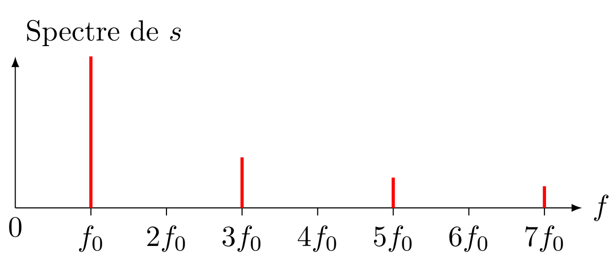
https://www.falstad.com/fourier/

Un signal créneau peut s'écrire avec les harmoniques impaires du fondamental (fréquence f) :

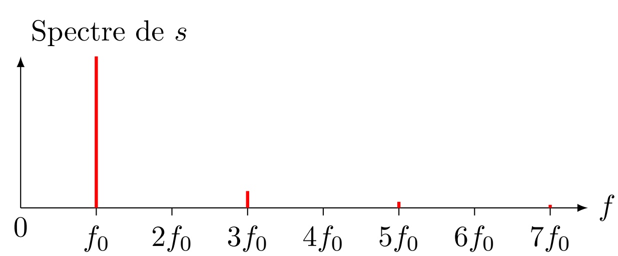
$$s(t) = A\sin\left(2\pi f t\right) + \frac{A}{3}\sin\left(6\pi f t\right) + \frac{A}{5}\sin\left(10\pi f t\right) + \frac{A}{7}\sin\left(14\pi f t\right) + \dots$$

Le signal triangle s'écrit aussi avec les harmoniques impaires, mais les amplitudes associées sont différentes :

$$
\begin{aligned}
s(t) &= A\sin\left(2\pi f t\right) - \frac{A}{9}\sin\left(6\pi f t\right) + \frac{A}{25}\sin\left(10\pi f t\right) - \frac{A}{49}\sin\left(14\pi f t\right) + \dots \\
&= A\sin\left(2\pi f t\right) + \frac{A}{9}\sin\left(6\pi f t + \pi\right) + \frac{A}{25}\sin\left(10\pi f t\right) + \frac{A}{49}\sin\left(14\pi f t + \pi\right) + \dots
\end{aligned}
$$



Spectre du signal créneau



Spectre du signal triangle

À retenir. Un signal périodique de fréquence f s'écrit comme somme :

- de la valeur moyenne du signal (**fréquence/pulsation nulle**) ;
- d'une sinusoïde à la fréquence f (le **fondamental**) et de sinusoïdes de fréquences multiplies de f ($k \times f$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$) : les **harmoniques**.

2 Puissance et valeur efficace

2.1 Valeur efficace

Définition. On définit la **valeur efficace** d'un signal périodique $s(t)$ par la relation

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle}$$

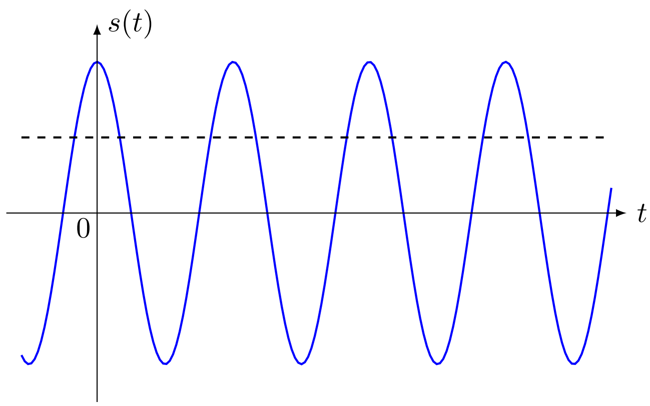
On définit cette quantité car l'énergie transportée est proportionnelle au carré des signaux (exemple : énergie stockée dans un condensateur, emmagasinée dans une bobine, énergie cinétique, puissance dissipée par effet Joule, etc.). Pour une résistance, la puissance moyenne dissipée dans une résistance est :

$$\mathcal{P} = \left\langle \frac{u^2(t)}{R} \right\rangle = \frac{\langle u(t)^2 \rangle}{R} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$$

Remarque. La valeur de 230 V pour le secteur est la valeur efficace de la tension.

Exemple

Considérons le signal $s(t) = A\cos(\omega t)$.



$$\begin{aligned}\left\langle s^2(t) \right\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(A^2\cos^2(\omega t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{A^2}{T}\left(\int_0^T \frac{1}{2}\mathrm{d}t + \int_0^T \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{A^2}{T}\left(\left[\frac{1}{2}t\right]_0^T + \left[\frac{1}{2}\frac{A}{2\omega}\sin(2\omega t)\,\mathrm{d}t\right]_0^T\right) \\ &= \frac{A^2}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{s_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}}$$

Attention

Il n'y a pas toujours le rapport $\sqrt{2}$ entre amplitude et valeur efficace. Par exemple, pour un signal triangle, la valeur efficace est $A/\sqrt{3}$ et pour un créneau de moyenne nulle, elle est égale à son amplitude A.

2.2 Répartition de la puissance : formule de Parseval

Un signal périodique peut s'écrire :

$$s(t) = S_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \cos(2\pi i f t + \varphi_i)$$

ou encore :

$$s(t) = S_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \sqrt{2} S_{i,\mathrm{eff}} \cos(2\pi i f t + \varphi_i)$$

Égalité de Parseval. On peut montrer que :

$$S_{\mathrm{eff}}^2 = S_0^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} S_{i,\mathrm{eff}}^2$$

Autrement dit, l'énergie portée par le signal se répartit dans les différentes harmoniques de celui-ci de façon indépendante.

3 Action d'un filtre sur un signal périodique

3.1 Rappel : action d'un filtre sur un signal sinusoïdal

Pour un signal :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

On lit sur le diagramme le gain et la phase pour la fréquence/pulsation du signal. La sortie sera :

$$s(t) = |\underline{H}(\omega)| \, A \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

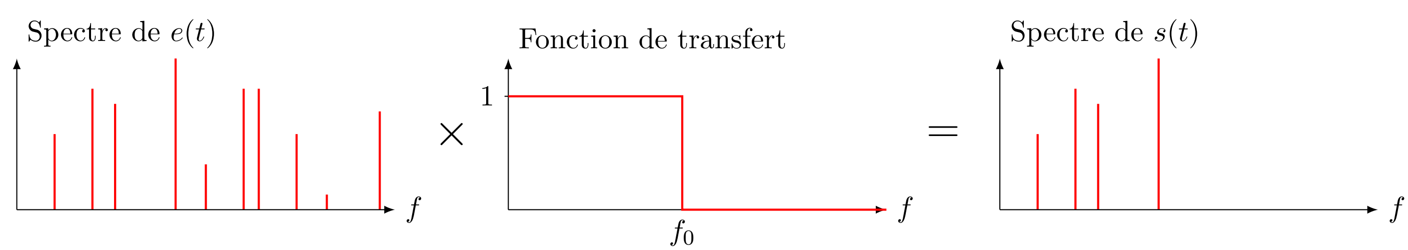
On trouve $|\underline{H}(\omega)|$ en inversant la formule du gain :

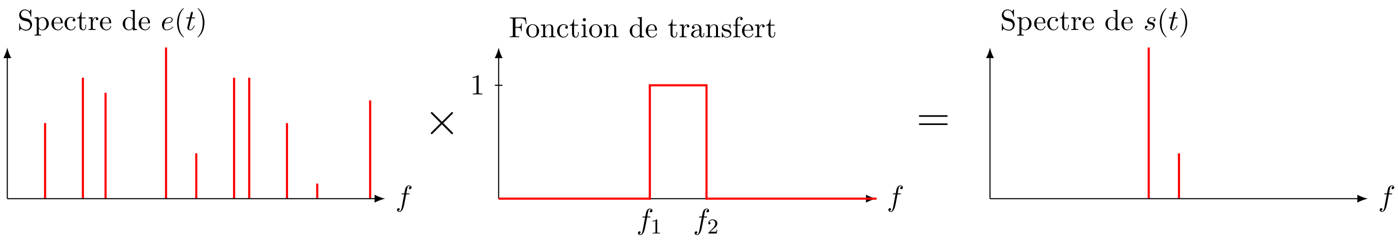
$$G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(\omega)| \qquad \text{donc} \qquad |\underline{H}(\omega)| = 10^{G_{\mathrm{dB}}(\omega)/20}$$

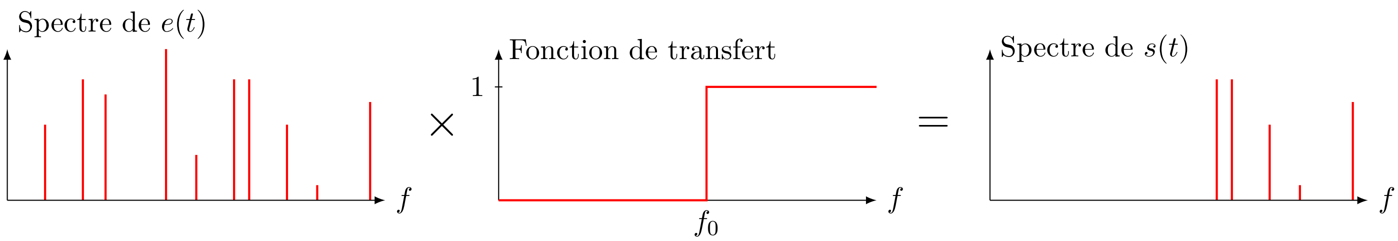
3.2 Généralisation

Linéarité. Un filtre est **linéaire** : si $s_1(t)$; $s_2(t)$ sont les signaux de sortie correspondants aux signaux d'entrée respectifs $e_1(t)$ et $e_2(t)$, alors le signal de sortie correspondant à $\lambda e_1(t) + \mu e_2(t)$ sera $\lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$.

Visualisation. Action sur l'amplitude.







Exemple

Étude numérique du filtrage d'un signal périodique.

Dans le script Python à consulter sur le site, on simule l'action d'un filtre passe-bas RC sur un signal créneau :

— Après avoir importé les paquets utiles, on définit le nombre de points pour le tracé du graphique (`N`) et l'intervalle de temps sur lequel on affiche le résultat (`tmax`), les paramètres physiques (la période `T`, la capacité du condensateur `C`, la résistance `R`) et le nombre de termes de la série de Fourier que l'on considère (il faut prendre un nombre aussi grand que possible pour que l'entrée soit proche d'un véritable signal créneau – on est limité ici par le temps de calcul).

— On définit le signal d'entrée ainsi. Pour chaque t (on fait une boucle sur la position dans le tableau i : $t =$`temps`[i]) :

$$e(t) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j \times \cos\left(2\pi j f t + \varphi_j\right)$$

— On calcule la sortie correspondante. Pour chaque t :

$$s(t) = H\left(0\right) \times c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j \times \left|H\right|\left(jf\right) \times \cos\left(2\pi j f t + \varphi_j + \varphi_h(jf)\right)$$

avec, pour un signal de fréquence jf donc de pulsation $2\pi jf$:

$$\left|H\right|\left(jf\right) = \frac{1}{1+\left(\omega RC\right)^2} = \frac{1}{1+\left(2\pi jfRC\right)^2}$$

$$\varphi_h(jf) = -\arctan\left(\omega RC\right) = -\arctan\left(2\pi jfRC\right)$$

3.3 Bilan

Méthode.

1. Mettre le signal à filtrer sous forme d'une somme de sinusoïdes (ne pas oublier la composante continue !) ;
2. repérer ou calculer le gain pour les différentes fréquences présentes ;
3. faire de même pour la phase ;
4. conclure.