Élec 6

Filtrage d'un signal périodique

1 Les signaux périodiques

1.1 Période

Définition. Un signal $s(t)$ est **périodique** si et seulement s'il existe une **période** T telle que, pour tout t :

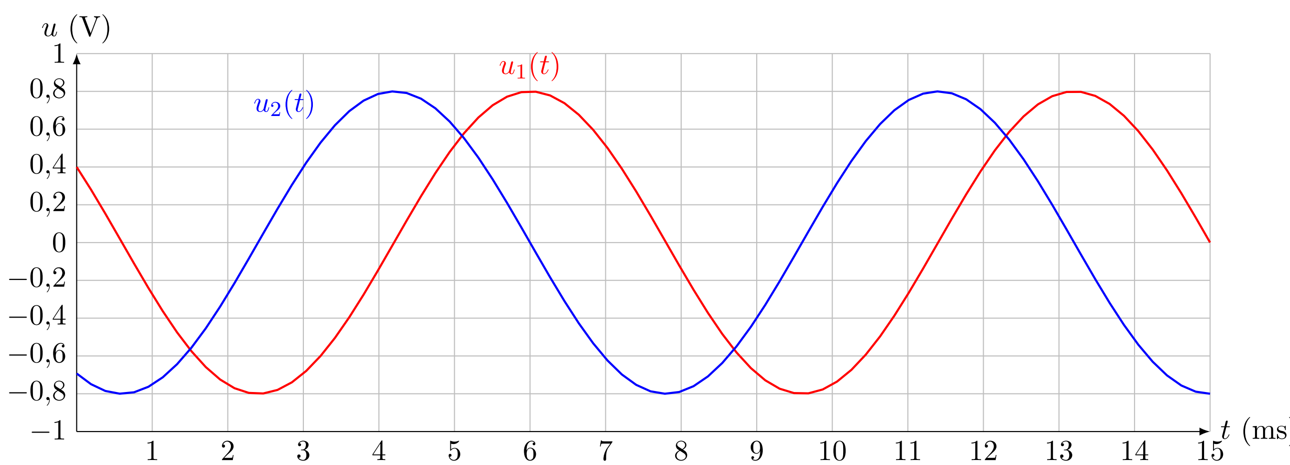
$$s(t+T) = s(t)$$

Exemple

Le signal $s(t) = A\sin(\omega t)$ a une période $T = 2\pi/\omega$.

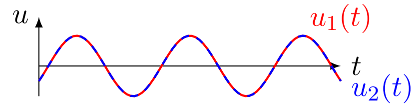
1.2 Déphasage

Considérons les signaux u_1 et u_2 **synchrones** (même pulsation) ci-dessous :

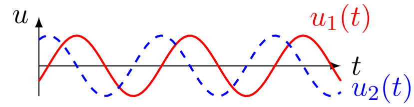


Définition.

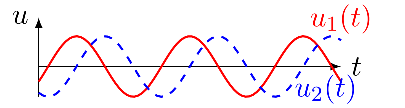
— $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$: u_2 est en **phase** avec u_1 ;



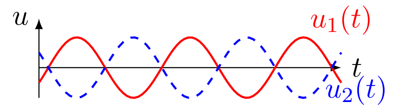
— $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$: u_2 est en **quadrature avance** sur u_1 ;



— $\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$: u_2 est en **quadrature retard** sur u_1 ;



— $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$: u_2 est en **opposition de phase** avec u_1.



Remarque.

1.3 Décomposition d'un signal périodique

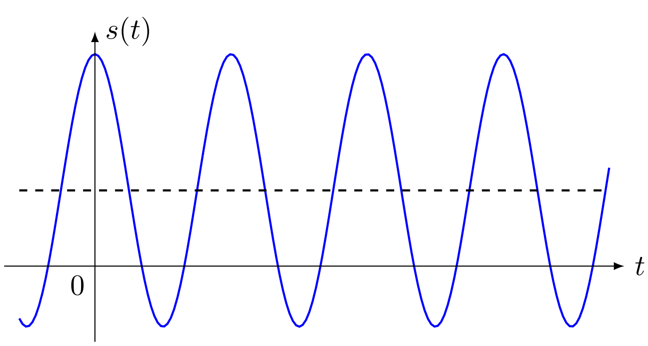
1.3.1 Valeur moyenne

Définition. On définit la **valeur moyenne** du signal périodique $s(t)$ par la relation

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \mathrm{d}t$$

Exemple

Considérons le signal $s(t) = C + A\cos(\omega t)$.



Remarque importante.

1.3.2 Théorème de Fourier

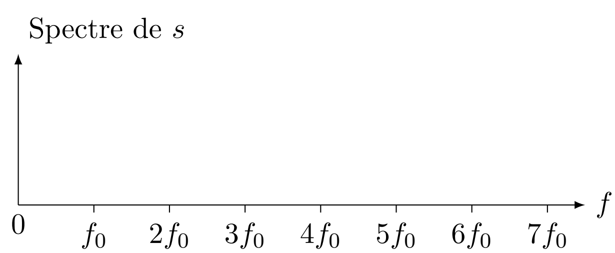
Tout signal périodique se décompose comme une somme de fonctions sinusoïdales. Ainsi, un signal $s(t)$ de fréquence f s'écrit

$$s(t) = S_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \cos\left(2\pi i f t + \varphi_i\right)$$

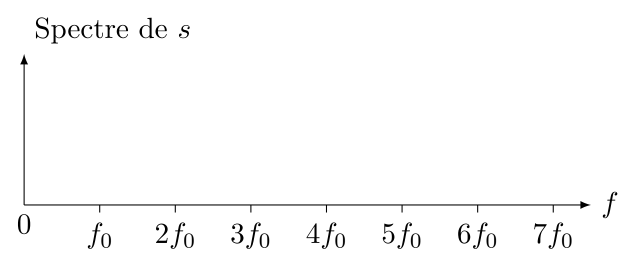
où :
- S_0 la valeur moyenne du signal (ou composante continue) ;
- A_i et φ_i des coefficients dépendant du signal. Les différents coefficients A_i représentent le **spectre** du signal.

Spectre des signaux créneau et triangle

https://www.falstad.com/fourier/



Spectre du signal créneau



Spectre du signal triangle

À retenir.

2 Puissance et valeur efficace

2.1 Valeur efficace

Définition. On définit la **valeur efficace** d'un signal périodique $s(t)$ par la relation

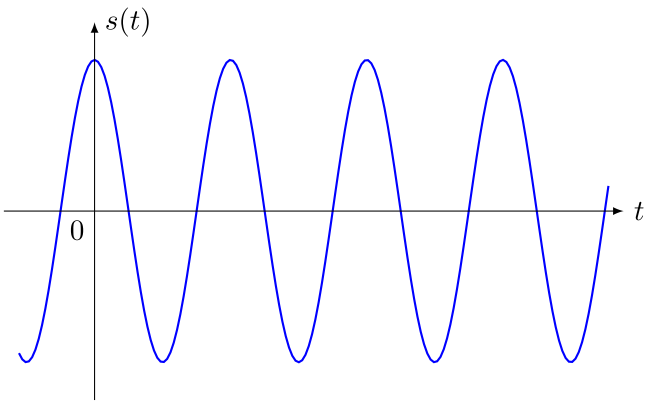
$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle}$$

On définit cette quantité car l'énergie transportée est proportionnelle au carré des signaux (exemple : énergie stockée dans un condensateur, emmagasinée dans une bobine, énergie cinétique, puissance dissipée par effet Joule, etc.). Pour une résistance, la puissance moyenne dissipée dans une résistance est :

$$\mathcal{P} = \left\langle \frac{u^2(t)}{R} \right\rangle = \frac{\langle u(t)^2 \rangle}{R} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$$

Remarque. La valeur de 230 V pour le secteur est la valeur efficace de la tension.

Valeur efficace du signal sinusoïdal. Considérons le signal $s(t) = A\cos(\omega t)$.



Attention

Il n'y a pas toujours le rapport $\sqrt{2}$ entre amplitude et valeur efficace. Par exemple, pour un signal triangle, la valeur efficace est $A/\sqrt{3}$ et pour un créneau de moyenne nulle, elle est égale à son amplitude A.

2.2 Répartition de la puissance : formule de Parseval

Un signal périodique peut s'écrire :

$$s(t) = S_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \cos(2\pi i f t + \varphi_i)$$

ou encore :

$$s(t) = S_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \sqrt{2} S_{i,\text{eff}} \cos(2\pi i f t + \varphi_i)$$

Égalité de Parseval. On peut montrer que :

$$S_{\text{eff}}^2 = S_0^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} S_{i,\text{eff}}^2$$

Autrement dit, l'énergie portée par le signal se répartit dans les différentes harmoniques de celui-ci de façon indépendante.

3 Action d'un filtre sur un signal périodique

3.1 Rappel : action d'un filtre sur un signal sinusoïdal

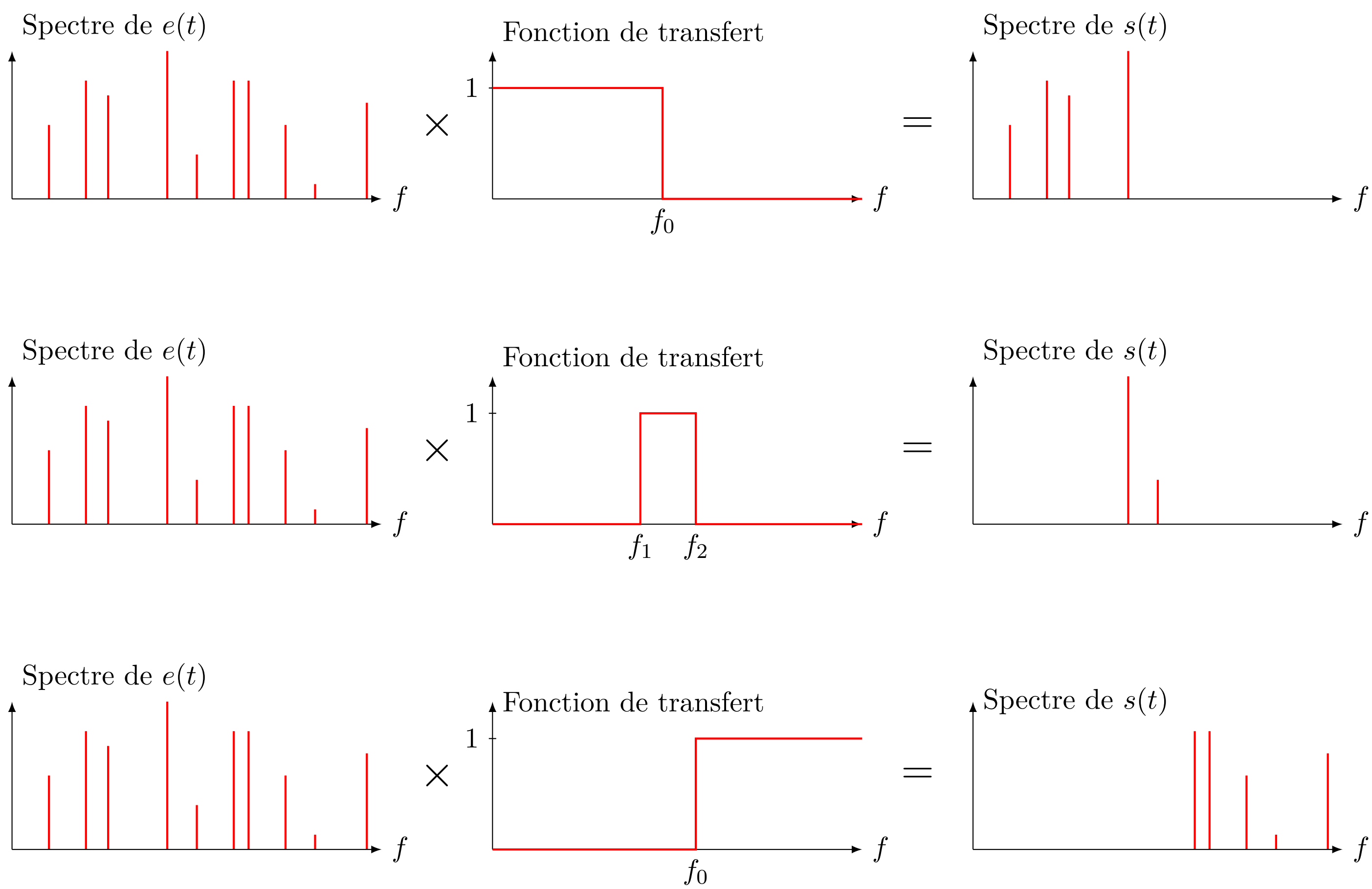
Pour un signal :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

3.2 Généralisation

Linéarité. Un filtre est **linéaire** : si $s_1(t)$; $s_2(t)$ sont les signaux de sortie correspondants aux signaux d'entrée respectifs $e_1(t)$ et $e_2(t)$, alors le signal de sortie correspondant à $\lambda e_1(t) + \mu e_2(t)$ sera $\lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$.

Visualisation. Action sur l'amplitude.



Exemple

Étude numérique du filtrage d'un signal périodique.

3.3 Bilan

Méthode.

1. Mettre le signal à filtrer sous forme d'une somme de sinusoïdes (ne pas oublier la composante continue !) ;
2. repérer ou calculer le gain pour les différentes fréquences présentes ;
3. faire de même pour la phase ;
4. conclure.