Élec 5 — Fonction de transfert – diagramme de Bode

1 Introduction au filtrage

1.1 Traitement du signal

- Une musique est un signal contenant plusieurs fréquences. Il est possible de donner un effet en appliquant un filtrage, c'est-à-dire une opération qui modifie l'intensité de certaines fréquences. Par exemple, pour les plus simples :
  - un filtrage « passe-bas » permet d'atténuer les fréquences au-dessus d'un certain seuil (les basses fréquences sont conservées) : cela permet de supprimer les sons aigus et de ne garder que les graves ;
  - un filtrage « passe-haut » permet d'atténuer les fréquences en-dessous d'un certain seuil (les hautes fréquences sont conservées) : cela permet de supprimer les sons graves et de ne garder que les aigus ;
  - un filtrage « passe-bande » permet d'atténuer toutes les fréquences en dehors d'un intervalle.
- Le but du **traitement du signal** est d'extraire l'information utile d'un signal issu d'un capteur où de multiples signaux se superposent au signal utile : bruits électromagnétiques, autres informations, etc.
  - Pour recevoir la radio, on doit sélectionner le signal autour d'une bande de fréquence précise et éliminer le reste ;
  - autre exemple, le signal délivré par le conditionnement d'une jauge de contrainte (capteur dont la résistance dépend de la déformation) peut être perturbé par des signaux à 50 Hz issu de l'alimentation du pont de jauges.

1.2 Définition

Définition. Un **filtre** est un système qui traite un signal sur un critère fréquentiel.

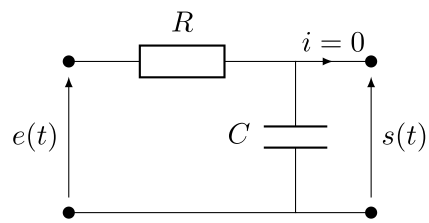
Un filtre électronique est un **quadripôle** :

On note l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$. Il existe aussi des filtres mécaniques, des filtres de couleur, etc.

Définition.
- Un filtre **passe-bas** est un filtre qui ne laisse passer que les basses fréquences.
- Un filtre **passe-haut** est un filtre qui ne laisse passer que les hautes fréquences.
- Un filtre **passe-bande** est un filtre qui ne laisse passer qu'une bande de fréquence.

2 Un premier exemple de filtre : le filtre passe-bas RC

2.1 Schéma



On n'indique pas le reste du circuit mais attention, un filtre s'insère dans une suite d'éléments électroniques.

- $e(t)$ peut venir d'un amplificateur, d'un pont de jauge, etc.
- $s(t)$ peut aller vers un appareil de mesure, un comparateur, etc.

On étudie le filtre en **sortie ouverte**, c'est-à-dire que le courant entrant dans le bloc suivant est nul. Nous verrons les conditions de cette hypothèse à la fin du chapitre.

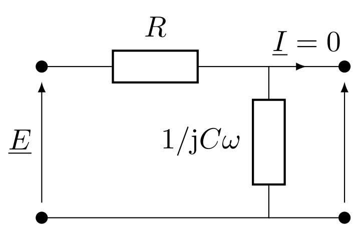
2.2 Fonction de transfert d'un filtre

Définition. La **fonction de transfert** d'un filtre est la grandeur complexe

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$$

où $\underline{S}$ est l'amplitude complexe du signal de sortie et $\underline{E}$ celle du signal d'entrée.

Cas du filtre RC : On étudie le circuit en régime sinusoïdal forcé : les tensions sont remplacées par leurs amplitudes complexes et les composants par leurs impédances :



On applique la formule du pont diviseur de tension car les deux impédances sont parcourues par le même courant (sortie ouverte) :

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \frac{1/\mathrm{j}C\omega}{R + 1/\mathrm{j}C\omega}\underline{E} \\ &= \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\underline{E} \end{aligned}$$

La fonction de transfert est donc :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}}$$

Où $\omega_c = 1/RC$.

La **forme canonique** de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre est

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}$$

où ω_c est la **pulsation de coupure du filtre** et H_0 une constante.

On souhaite en général étudier l'effet qu'a un filtre sur l'amplitude des différentes harmoniques du spectre : on calcule donc le **module** de la fonction de transfert.

Dans le cas du circuit RC :

$$|\underline{H}| = \left| \frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}} \right| = \frac{|1|}{\left|1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}\right|} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}}$$

Bande passante La bande passante est telle que :

$$|\underline{H}| \geq \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Dans le cas du filtre RC, $|\underline{H}|_{\max} = 1$ donc la condition pour que la pulsation ω soit dans la bande passante est :

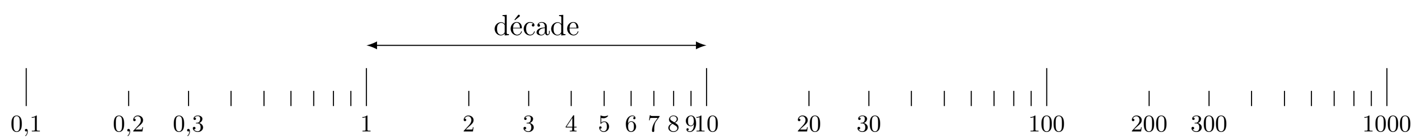
$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \leq \sqrt{2} \iff 1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \leq 2 \iff \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \leq 1$$

$$\boxed{\omega \leq \omega_c}$$

La bande passante du filtre RC correspond à l'ensemble des fréquences inférieures à $\omega_c = 1/RC$.

2.3 Gain

Échelle logarithmique Pour visualiser la fonction de transfert sur de grands intervalles de fréquences, on utilise l'échelle logarithmique :



Le module de la fonction de transfert présente de grandes variations d'amplitude. Pour pouvoir les différencier, on étudie le module de la fonction de transfert en échelle logarithmique. On définit alors :

Définition. Le **gain** d'un filtre est :

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(\omega)|$$

où $\log$ est le logarithme décimal. Le gain s'exprime en **décibels** (dB).

Remarque. Le logarithme décimal est tel que $\log(10) = 1$, $\log(100) = 2$, $\log(1000) = 3$, etc. Il est définit comme :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Lorsque le gain diminue de 20 décibels, l'amplitude du signal de sortie est divisée par 10.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
|\underline{H}(\omega_2)| = \frac{|\underline{H}(\omega_1)|}{10} \quad &\iff \quad 20\log(|\underline{H}(\omega_2)|) = 20\log\left(\frac{|\underline{H}(\omega_1)|}{10}\right) \\
&\iff \quad 20\log(|\underline{H}(\omega_2)|) = 20\log(|\underline{H}(\omega_1)|) - 20\log(10) \\
&\iff \quad G_{\mathrm{dB}}(\omega_2) = G_{\mathrm{dB}}(\omega_1) - 20\ \mathrm{dB}
\end{aligned}$$

La bande passante est l'ensemble des pulsations / fréquences telles que $G_{\mathrm{dB}}(\omega) \geq G_{\max} - 3$ dB.

Démonstration : la condition de la bande passante est équivalente à :

$$20\log\left(\underline{H}\right) > 20\log\left(\frac{|H|_{\max}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$20\log\left(\underline{H}\right) > \underbrace{20\log\left(|H|_{\max}\right)}_{G_{\max}} - \underbrace{20\log\left(\sqrt{2}\right)}_{3\text{ dB}}$$

Un gain nul signifie que l'amplitude de sortie est égale à l'amplitude d'entrée.

Démonstration : si $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 0$, alors $|H|(\omega) = 1$.

Calcul du gain pour le filtre RC :

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}\right) = -10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$$

2.4 Diagramme de Bode

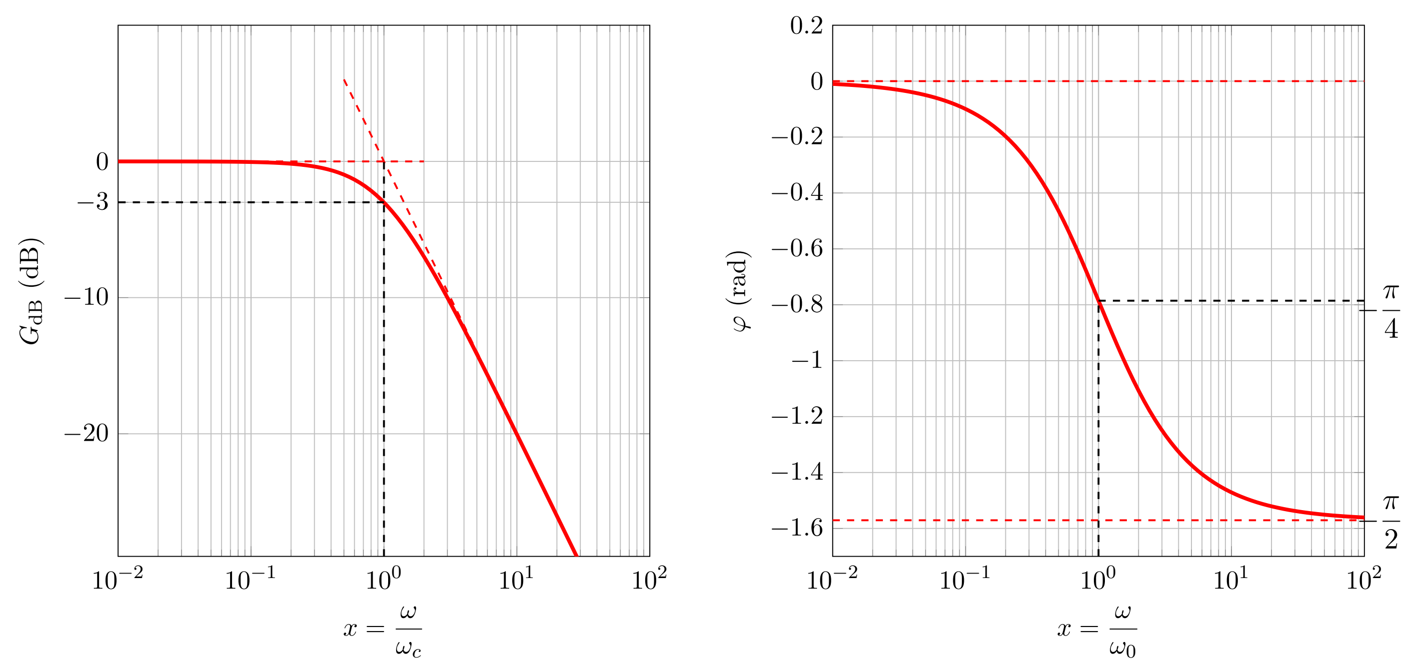
Définition. Le **diagramme de Bode** d'un filtre est le tracé
- du **gain** du filtre ;
- de la **phase** de la fonction de transfert.

Ces deux tracés sont réalisés en fonction de la pulsation ou de la fréquence représentés en **échelle logarithmique**.

Phase : on repart de la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}$. Ainsi :

$$\varphi = \arg\left(\underline{H}\right) = -\arg\left(1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}\right) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

Le diagramme de Bode du filtre passe-bas d'ordre RC est présenté ci-dessous :



Analyse asymptotique : on peut obtenir deux droites asymptotiques :

— $\omega \ll \omega_c$:

$$1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c} \approx 1 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\underline{H} \approx 1}$$

Le module de la fonction de transfert est 1. Ainsi $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 0$: l'amplitude de sortie est égale à l'amplitude d'entrée. D'autre part, $\varphi = 0$.

— $\omega \gg \omega_c$:

$$1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c} \approx \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\underline{H} \approx -\mathrm{j}\frac{\omega_c}{\omega}}$$

Le module de la fonction de transfert est $1/\left(\omega/\omega_c\right)$. Ainsi $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = -20\log\left(\omega/\omega_c\right)$. Le gain diminue de 20 dB par décade : cela veut dire que si ω est multiplié par 10, le gain baisse de 20 dB. La phase tend vers $-\pi/2$ ($\underline{H}$ est un imaginaire pur de partie imaginaire négative).

— $\omega = \omega_c$: $\underline{H} = 1/(1+\mathrm{j})$ si bien que $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log\left(1/\sqrt{2}\right) = -3$ dB et $\varphi = -\pi/4$.

2.5 Lecture d'un diagramme de Bode

Il suffit de repérer le gain et la phase pour la fréquence du signal. Si $e(t) = A\cos(\omega t)$, la sortie sera :

$$s(t) = |\underline{H}(\omega)|\, A\cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

On trouve $|\underline{H}(\omega)|$ en inversant la formule du gain :

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log|\underline{H}(\omega)| \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\underline{H}(\omega)| = 10^{G_{\mathrm{dB}}(\omega)/20}$$

Application *Filtrage d'un signal triangle*

Écrire le signal temporel résultant du filtrage d'un signal suivant :

$$A\sin\left(\frac{\omega_c}{3}t\right) - \frac{A}{9}\sin(\omega_c t) + \frac{A}{25}\sin\left(\frac{5\omega_c}{3}t\right)$$

Il faut lire graphiquement les valeurs du gain et de la phase pour chacune des fréquences :

— La pulsation du fondamental est $\omega_c/3$. À cette pulsation, on lit $G_{\mathrm{dB}} = -0{,}5$ dB, ce qui correspond à un atténuation du signal d'un facteur $10^{-0{,}5/20} = 0{,}95$. On lit ensuite la phase $\varphi(\omega_c/3) = -0{,}35$ rad.

— La pulsation de la première harmonique est ω_c. À cette pulsation, on lit $G_{\mathrm{dB}} = -3$ dB, ce qui correspond à un atténuation du signal d'un facteur $10^{-3/20} = 0{,}7$. On lit ensuite la phase $\varphi(\omega_c) = -\pi/4$ rad.

— La pulsation de la seconde harmonique est $5\omega_c/3$. À cette pulsation, on lit $G_{\mathrm{dB}} = -6$ dB, ce qui correspond à un atténuation du signal d'un facteur $10^{-6/20} = 0{,}5$. On lit ensuite la phase $\varphi(5\omega_c/3) = -1$ rad.

Le signal après filtrage est donc :

$$0{,}95 \times A\sin\left(\frac{\omega_c}{3}t - 0{,}35\right) - 0{,}7 \times \frac{A}{9}\sin\left(\omega_c t - \frac{\pi}{4}\right) + 0{,}5 \times \frac{A}{25}\sin\left(\frac{5\omega_c}{3}t - 1\right)$$

2.6 Effet du filtre à haute fréquence

Les hautes fréquences sont atténuées.

Définition. Un signal périodique de pulsation fondamentale ω_1, filtré par un filtre passe-bas de pulsation de coupure ω_c est **moyenné**. La sortie du filtre est un signal égale à la valeur moyenne du signal d'entrée.

Plus précisément, on peut écrire :

$$\underline{H} \approx \frac{1}{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{\omega_c}{\mathrm{j}\omega}$$

Ainsi :

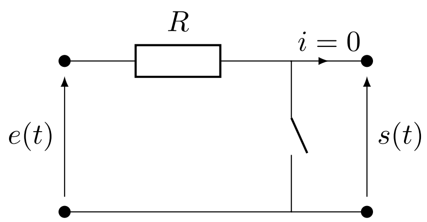
$$\underline{S} = \frac{\omega_c}{\mathrm{j}\omega}\underline{E}$$

Une division par $\mathrm{j}\omega$ équivaut à une intégration dans les réels.

> **Définition.** Un signal périodique de pulsation fondamentale ω_1, filtré par un filtre passe-bas de pulsation de coupure ω_c est **intégré**. La sortie du filtre est l'intégrale du signal d'entrée multiplié par ω_c.

2.7 Prévoir le comportement d'un filtre

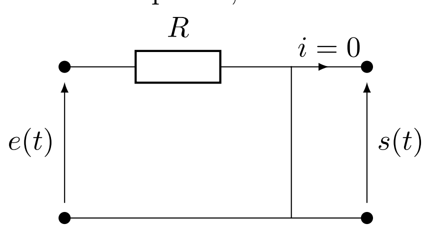
À basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, ainsi, on peut reproduire le circuit ainsi :



D'après la loi des nœuds, le courant traversant la résistance est nul, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle. Ainsi :

$$e(t) = s(t)$$

À haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil, ainsi, on peut reproduire le circuit ainsi :



La tension aux bornes d'un fil est nulle ainsi :

$$s(t) = 0$$

On retrouve donc le phénomène que l'on a mis en évidence :

- à basse fréquence, la tension de sortie est égale à la tension d'entrée (gain et phase nulle) ;
- à haute fréquence, la tension de sortie est nulle (module de la fonction de transfert nul).

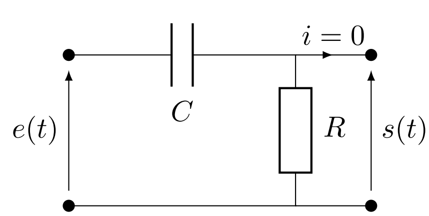
2.8 Bilan

Pour l'étude d'un filtre :

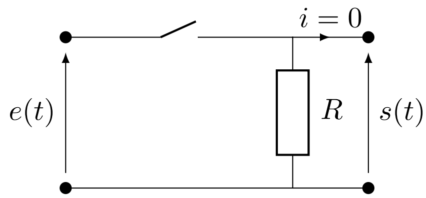
- On fait l'étude à basses fréquences (le condensateur se compte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil) et à hautes fréquences (le condensateur se compte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert) ;
- on écrit le circuit avec les amplitudes complexes et les impédances des composants ;
- on fait un pont diviseur ;
- on calcule l'amplitude complexe puis le gain en dB.

3 Le filtre passe-haut du premier ordre

Les façons de réaliser un filtre passe-haut sont nombreuses. Par exemple :



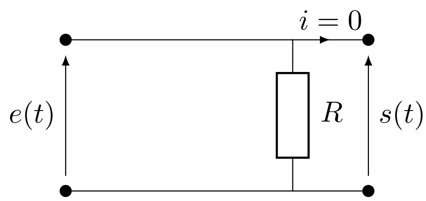
▶ **Comportement asymptotique.** À basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, ainsi, on peut reproduire le circuit ainsi :



Le courant est nul, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle :

$$s(t) = 0$$

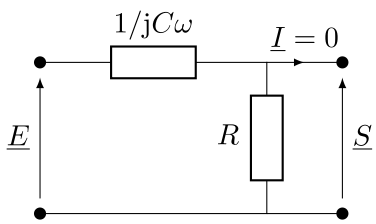
À haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil, ainsi, on peut reproduire le circuit ainsi :



On a immédiatement :

$$s(t) = e(t)$$

▶ **Fonction de transfert.**



On applique la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{S} = \frac{R}{R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}\underline{E} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\underline{E}$$

En notant $\omega_c = 1/RC$:

$$\underline{S} = \frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}\underline{E}$$

La **forme canonique** de la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre est

$$\underline{H}(\omega) = H_0 \frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}$$

où ω_c est la **pulsation de coupure du filtre**.

▶ **Gain.**

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}\right)}$$

▶ **Phase.**

$$\varphi = \arg\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}\right) - \arg\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

▶ **Diagramme de Bode et droite asymptotiques.**

— $\omega \ll \omega_c$:

$$1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c} \approx 1 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\underline{H} \approx \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}$$

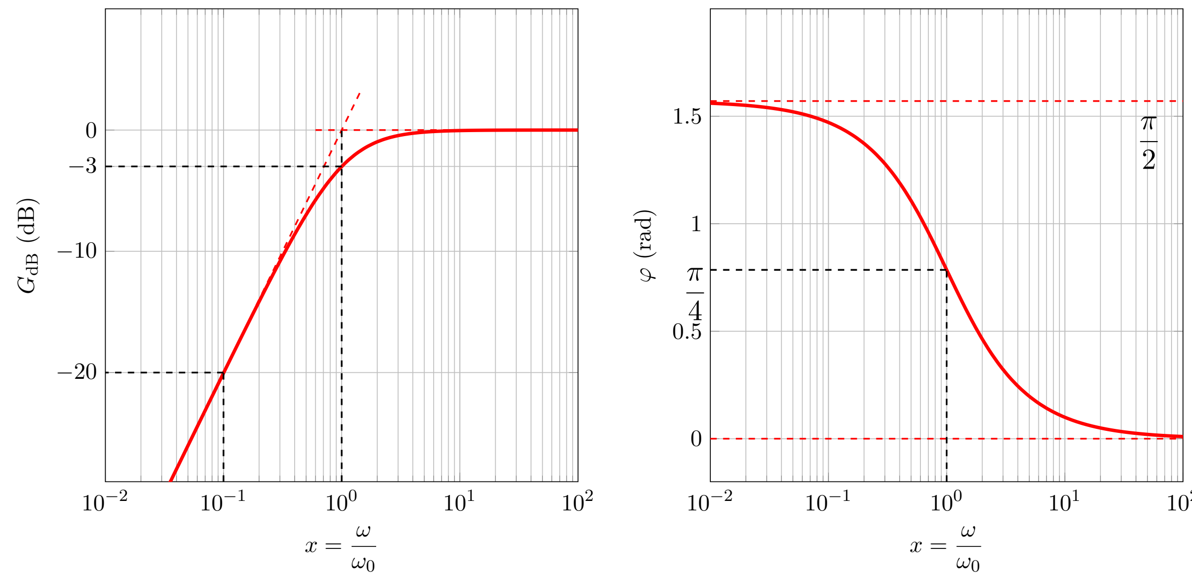
Le module de la fonction de transfert est ω/ω_c. Ainsi $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log(\omega/\omega_c)$. Le gain augmente de 20 dB par décade. La phase tend vers $\pi/2$ ($\underline{H}$ est un imaginaire pur de partie imaginaire positive).

— $\omega \gg \omega_c$:

$$1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c} \approx \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\underline{H} \approx 1}$$

Le module de la fonction de transfert est 1. Ainsi $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 0$: l'amplitude de sortie est égale à l'amplitude d'entrée. D'autre part, $\varphi = 0$.

— $\omega = \omega_c$: $\underline{H} = \mathrm{j}/(1+\mathrm{j})$ si bien que $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log\left(1/\sqrt{2}\right) = -3$ dB et $\varphi = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$.



Remarque. Aux basses fréquences, on peut approximer $\underline{H}$ à simplement :

$$\underline{H} = \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}$$

Ainsi :

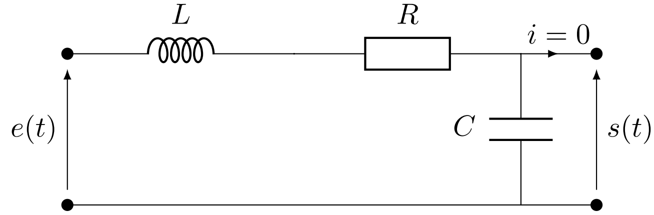
$$\underline{S} = \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}\underline{E} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{s(t) = \frac{1}{\omega_c}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t)}$$

La sortie est la **dérivée** de la fonction d'entrée, divisée par ω_c : le comportement du filtre est **dérivateur**.

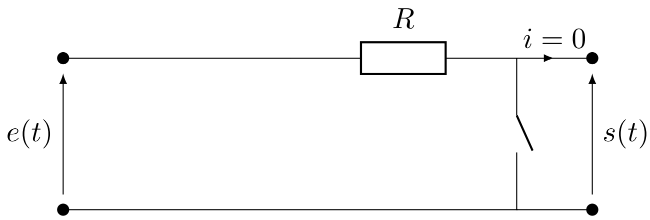
4 Deux filtres du second ordre

4.1 Le filtre passe-bas du second ordre

Les façons de réaliser un filtre passe-bas du second ordre sont nombreuses. Le plus simple est de faire ce montage :



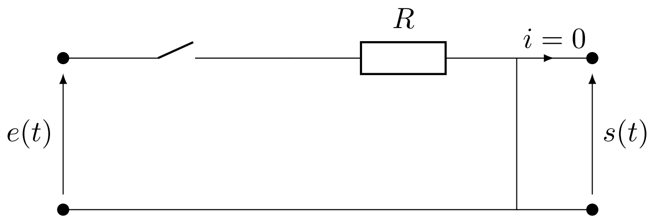
▶ **Comportement asymptotique.** À basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil, ainsi, on peut reproduire le circuit ainsi :



Le courant est nul (le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert), donc la tension aux bornes de la résistance est nulle :

$$s(t) = e(t)$$

À haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert, ainsi, on peut reproduire le circuit ainsi :

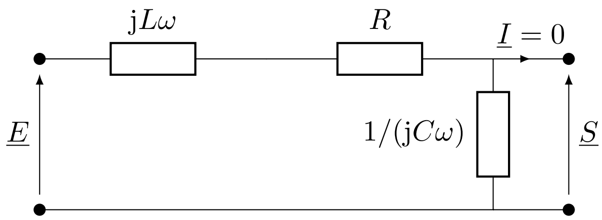


La tension aux bornes d'un fil est nulle :

$$s(t) = 0$$

Les basses fréquences passent mais pas les hautes : on peut prévoir un comportement passe-bas.

- **Fonction de transfert.**



On applique la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{S} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}{R + \mathrm{j}L\omega + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}} \underline{E}$$

$$\underline{S} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega + (\mathrm{j}\omega)^2 LC} \underline{E}$$

On souhaite faire intervenir le facteur de qualité du circuit RLC série et la pulsation propre. Ainsi, on obtiendra la forme générique de la fonction de transfert du filtre passe-bande.

$$Q\omega_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{RC}$$

Ainsi :

$$\underline{S} = \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0 Q} + \left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2} \underline{E}$$

La **forme canonique** de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du second ordre est

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0 Q} + \left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec ω_0 la **pulsation propre du filtre** et Q le **facteur de qualité** du filtre.

- **Gain.**

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}}$$

$$\boxed{G_{\mathrm{dB}}(\omega) = -10 \log \left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2 \right)}$$

- **Diagramme de Bode et droite asymptotiques.**

— $\omega \ll \omega_0$:

$$1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0 Q} + \left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx 1 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\underline{H} \approx 1}$$

Le module de la fonction de transfert est 1. Ainsi $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 0$: l'amplitude de sortie est égale à l'amplitude d'entrée. D'autre part, $\varphi = 0$.

— $\omega = \omega_0$:

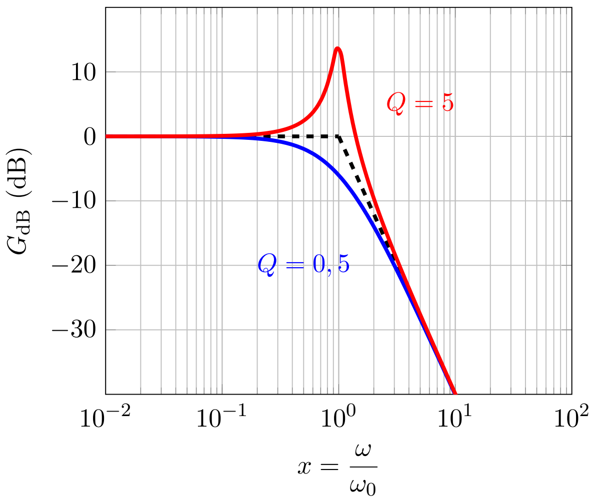
$$1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0 Q} + \left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{\mathrm{j}\omega_0}{\omega_0 Q} = \mathrm{j}/Q \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\underline{H} = -\mathrm{j}Q}$$

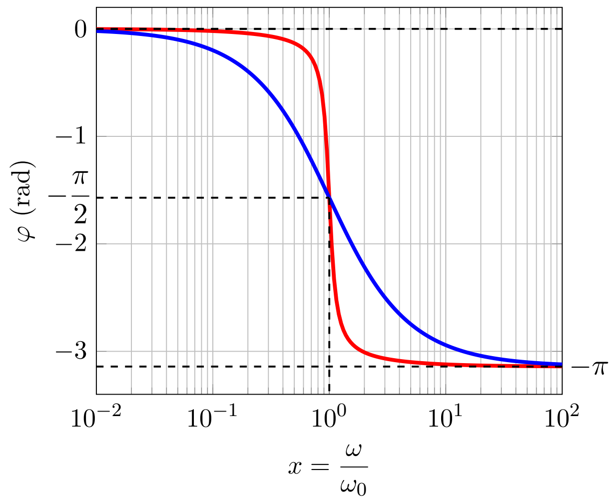
Le module de la fonction est Q. Ainsi $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log(Q)$: il peut y avoir une résonance, d'autant plus marquée que Q est grand. La phase vaut $-\pi/2$ ($\underline{H}$ est un imaginaire pur de partie imaginaire négative).

— $\omega \gg \omega_0$:

$$1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0 Q} + \left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx \left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\underline{H} \approx -\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

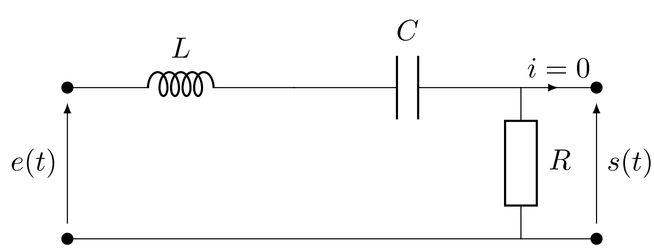
Le module de la fonction de transfert est $1/\left(\omega/\omega_0\right)^2$. Ainsi $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = -40\log(\omega/\omega_0)$. Le gain diminue de 40 dB par décade : **le filtre est plus sélectif que le passe-bas d'ordre 1**. La phase tend vers $-\pi$ ($\underline{H}$ est un réel négatif).



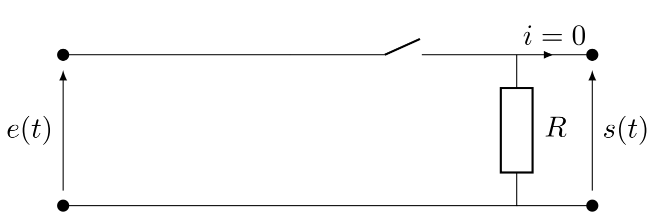


4.2 Le filtre passe-bande du second ordre

Les façons de réaliser un filtre passe-bande sont nombreuses. Le plus simple est de faire ce montage :



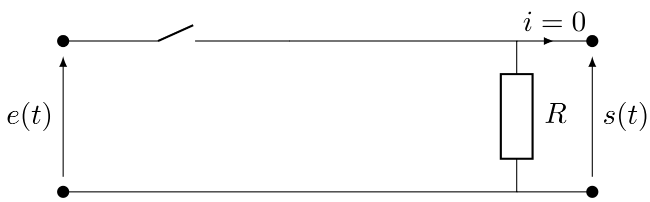
▶ **Comportement asymptotique.** À basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil, ainsi, on peut reproduire le circuit ainsi :



Le courant est nul (le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert), donc la tension aux bornes de la résistance est nulle :

$$s(t) = 0$$

À haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert, ainsi, on peut reproduire le circuit ainsi :

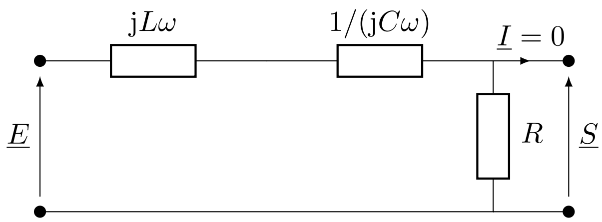


Le courant est nul (la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert), donc la tension aux bornes de la résistance est nulle :

$$s(t) = 0$$

On voit que ni les hautes fréquences, ni les basses fréquences ne passent : on peut prévoir un comportement passe-bande.

▶ **Fonction de transfert.**



On applique la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{S} = \frac{R}{R + \mathrm{j}L\omega + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}\underline{E}$$

On divise par R :

$$\underline{S} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{L}{R}\omega + \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}}\underline{E}$$

On souhaite faire intervenir le facteur de qualité du circuit RLC série et la pulsation propre. Ainsi, on obtiendra la forme générique de la fonction de transfert du filtre passe-bande.

$$Q\omega_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{RC} \qquad \text{et} \qquad \frac{Q}{\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{LC} = \frac{L}{R}$$

Ainsi :

$$\underline{S} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{Q}{\omega_0}\omega + \frac{Q\omega_0}{\mathrm{j}\omega}}\underline{E}$$

Donc, comme $1/\mathrm{j} = -\mathrm{j}$:

$$\underline{S} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{E}$$

La **forme canonique** de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre est

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec ω_0 la **pulsation propre du filtre** et Q le **facteur de qualité** du filtre.

▶ **Gain.**

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\boxed{G_{\mathrm{dB}}(\omega) = -10\log\left(1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)}$$

▶ **Diagramme de Bode et droite asymptotiques.**

— $\omega \ll \omega_0$:

$$1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \approx -\mathrm{j}Q\frac{\omega_0}{\omega} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\underline{H} \approx \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0 Q}}$$

Donc $|\underline{H}(\omega)| \approx \dfrac{\omega}{\omega_0 Q}$ et $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0 Q}\right)$. Le gain croît de 20 dB par décade. La phase tend vers $\pi/2$ quand ω tend vers 0.

— $\omega = \omega_0$:

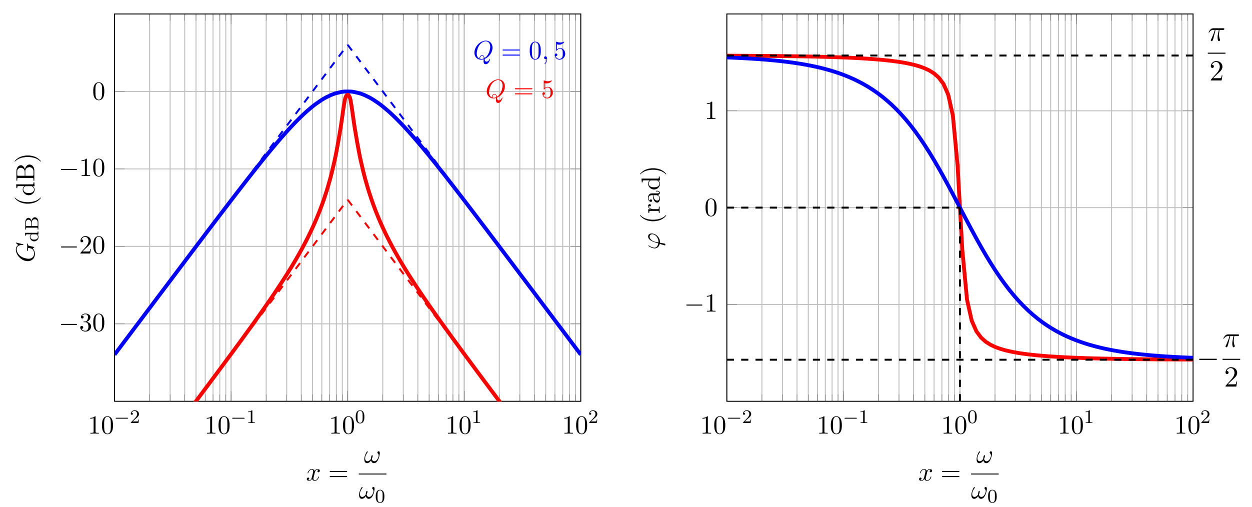
$$1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0 Q} + \left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\underline{H} = 1}$$

Le gain est nul et la phase aussi.

— $\omega \gg \omega_0$:

$$1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \approx \mathrm{j}Q\frac{\omega}{\omega_0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\underline{H} \approx -\frac{\mathrm{j}\omega_0}{\omega Q}}$$

Donc $G(\omega) \approx -20\log\left(\dfrac{Q\omega}{\omega_0}\right)$: le gain diminue de 20 dB par décade. La phase tend vers $-\pi/2$ quand ω tend vers $+\infty$.

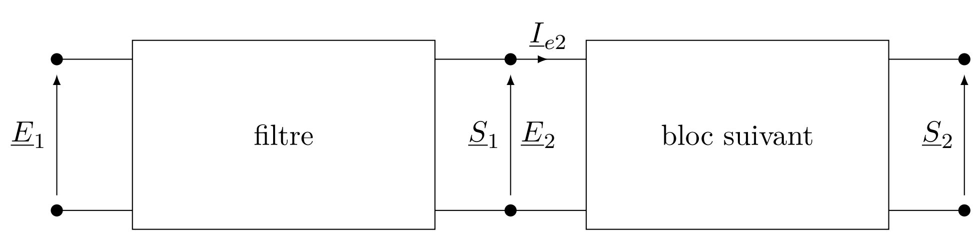


Remarque.

1. On a toujours $\underline{H}(\omega_0) = 1$, mais la bande passante autour de ω_0 est d'autant plus étroite que Q est grand.
2. Le comportement de ce filtre est dérivateur à basse fréquence et intégrateur à haute fréquence.
3. On obtient un comportement passe-haut du second ordre en prenant la tension aux bornes de la bobine.

5 Impédances d'entrée et de sortie

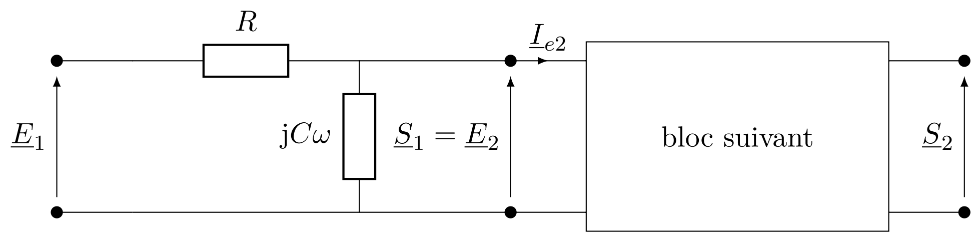
Nous avons fait l'étude en boucle ouverte ; en réalité, la sortie est branchée sur un autre quadripôle (convertisseur analogique-numérique, appareil de mesure, etc.). Rigoureusement, sur le schéma ci-dessous, le courant i_{e2} entrant dans le second bloc n'est donc pas nul :



Définition. On appelle **impédance d'entrée** d'un quadripôle le rapport des amplitudes complexes de la tension d'entrée et du courant entrant. Ici :

$$\underline{Z}_{e2} = \frac{\underline{E}_2}{\underline{I}_{e2}}$$

Considérons le cas du filtre passe-bas RC :



Si le courant entrant $\underline{I}_{e2}$ est négligeable devant celui traversant le condensateur, alors l'étude faite précédemment est valide (le courant traversant la résistance est le même que celui traversant le condensateur et le pont diviseur de tension est applicable). Or :

$$\underline{I}_C = \mathrm{j}C\omega\underline{S}_1$$

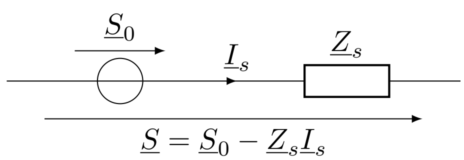
Ainsi, la condition $\underline{I}_{e2}$ $\ll$est :

$$\frac{1}{\underline{Z}_2} \ll \mathrm{j}C\omega$$

Soit :

$$\boxed{\underline{Z}_{e2} \gg \underline{Z}_C}$$

Plus généralement, un bloc (comme un filtre) peut être modélisé par un générateur de Thévenin :



la grandeur $\underline{Z}_s$ est nommée **impédance de sortie**. Pour un filtre, $\underline{S}$ est la tension de sortie calculée en sortie ouverte.

On retiendra le résultat général :

Pour que tout se passe comme si chaque bloc était indépendant (en sortie ouverte), il faut que l'impédance de sortie du premier bloc soit faible devant l'impédance d'entrée du second, de sorte à négliger le courant entrant dans le second étage.

En pratique, on emploie souvent des montages utilisant des **amplificateurs opérationnels** qui ont une très grande impédance d'entrée.