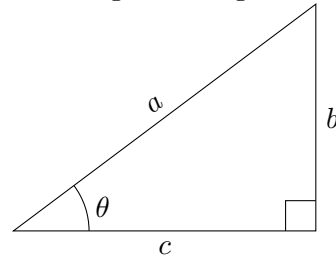


1 Rappel mathématique : les fonctions trigonométriques

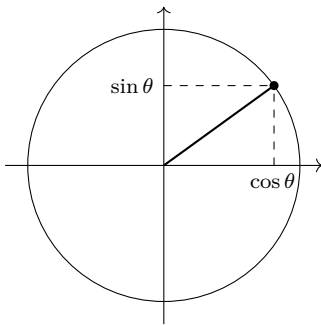
1.1 Relations dans le triangle rectangle

Les fonctions sinus et cosinus sont avant tout des relations dans le triangle rectangle :

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{c}{a} = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypothénuse}} ; \\ \sin \theta &= \frac{b}{a} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypothénuse}} ; \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{b}{c} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} .\end{aligned}$$



1.2 Le cercle trigonométrique

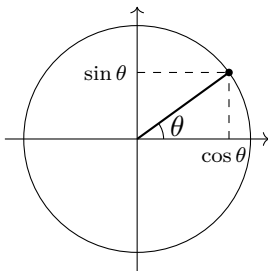


Le cercle trigonométrique a pour rayon 1. Un point situé sur ce cercle permet donc de lire les valeurs du cosinus en abscisse et du sinus en ordonnée.

Sauf mention contraire, les angles s'expriment en radians.

$$\theta_{\text{rad}} = \frac{\pi}{180} \theta_{\text{deg}}$$

Application



À l'aide du cercle trigonométrique, exprimer :

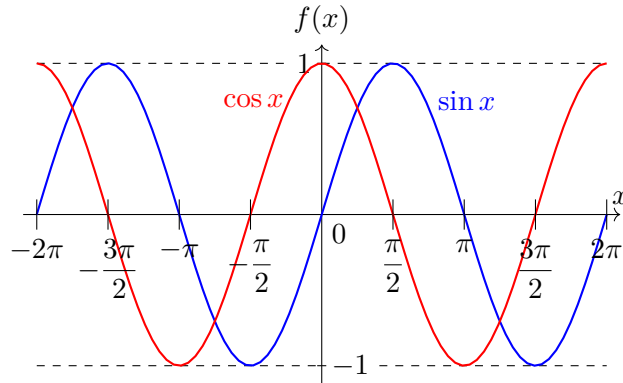
- ▷ $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$
- ▷ $\cos(-\theta) = \cos \theta$
- ▷ $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$
- ▷ $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos \theta$
- ▷ $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta$
- ▷ $\cos(\pi/2 + \theta) = -\sin \theta$

Valeurs remarquables

Angle (en radian)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
Angle (en degré)	0	30	45	60	90	180	270
$\cos \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0
$\sin \theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
$\tan \theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞

1.3 Graphes

On rappelle le tracé des fonctions sinus et cosinus ci-dessous. Ce tracé est à savoir refaire.



1.4 Le signal sinusoïdal

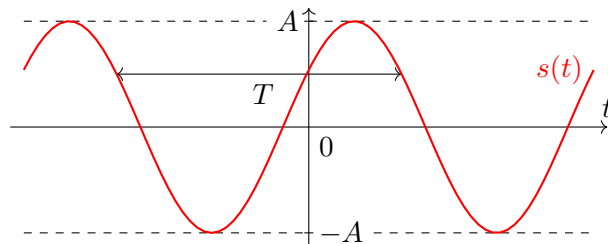
Un signal sinusoïdal est de la forme :

$$s(t) = A \times \cos(\omega t + \varphi)$$

- A est appelée **amplitude** du signal. Ainsi, les valeurs maximales de $s(t)$ sont A et $-A$, la fonction cosinus oscillant entre -1 et 1 ;
- φ est appelée **phase à l'origine** ;
- ω est appelée **pulsation** du signal et son unité est le $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
- La **période** est la durée entre deux phénomènes identiques consécutifs. On la note T et son unité est la seconde. Pour le signal sinusoïdal, comme $\cos$ est 2π -périodique, cela correspond à une variation de $\omega t + \varphi$ de 2π donc :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- La **fréquence** : est le nombre de périodes par seconde. On la note f et elle s'exprime en Hz ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$). La période et la fréquence sont liées par la relation $f = \frac{1}{T}$.



Bilan.

- A est nommée amplitude du signal sinusoïdal ;
- ω est nommée pulsation du signal. Son unité est le $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Elle est liée à sa période par

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Longleftrightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

On définit aussi la fréquence du signal, dont l'unité est la s^{-1} ou le hertz (Hz)

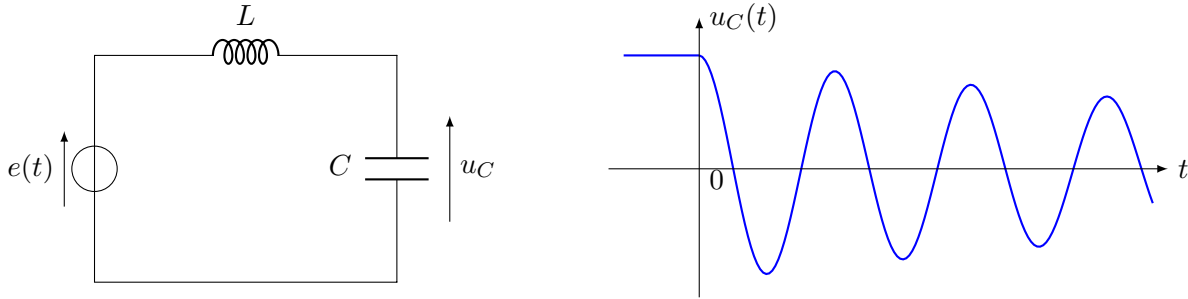
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \Longleftrightarrow \quad \omega = 2\pi f$$

- φ représente la phase à l'origine (sa valeur est liée au choix de l'origine des temps)

2 L'oscillateur LC

2.1 Introduction expérimentale

On réalise le circuit suivant :



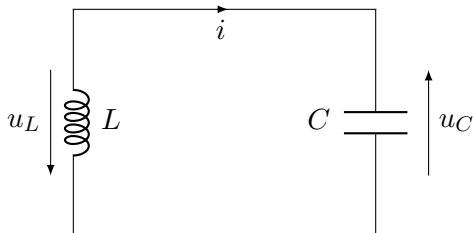
Lorsque $e(t)$ est un échelon descendant, on observe quelques oscillations sinusoïdales amorties de la tension aux bornes du condensateur (ci-dessus à droite). On procède à plusieurs mesures :

- pour une capacité $C_1 = 80$ nF et $L_1 = 43$ mH, on mesure une période égale à $T_1 = 364 \mu\text{s}$
- pour une capacité $C_1 = 20$ nF et $L_1 = 43$ mH, on mesure une période égale à $T_2 = 184 \mu\text{s}$

La tension aux bornes du condensateur oscille de façon régulière et sinusoïdale, avec une période qui ne dépend pas de l'amplitude de l'excitation mais des caractéristiques de l'oscillateur (capacité du condensateur et inductance de la bobine).

2.2 Modélisation

Étudions le circuit ci-dessous (sans générateur car échelon descendant) :



La loi des mailles s'écrit $u_C + u_L = 0$, par ailleurs, aux bornes du condensateur et de la bobine :

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad \text{et} \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

On souhaite établir une équation différentielle sur u_C . On écrit donc :

$$L \frac{di}{dt} + u_C = 0$$

Ainsi :

$$L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_C}{dt} \right) + u_C = 0$$

D'où :

$$LC \frac{d}{dt} \left(\frac{du_C}{dt} \right) + u_C = 0$$

Finalement :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0}$$

$\frac{d^2 u_C}{dt^2}$ désigne la **dérivée seconde** de la tension u_C par rapport au temps.

2.3 Solution de l'équation différentielle

2.3.1 Cas général

La solution générale de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega_0^2 f = 0$$

peut s'écrire comme :

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Les constantes A et B dépendent des conditions initiales. Ou, de façon totalement équivalente :

$$f(t) = A' \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Les constantes A' et φ dépendent des conditions initiales.

Remarque. Les deux formes sont rigoureusement équivalentes : on choisira la forme qui simplifie le plus les calculs. Il est en général plus facile de calculer les constantes d'intégration avec la première, mais le tracé de la seconde est plus aisé.

2.3.2 Le circuit LC

On identifie la **pulsation propre** du circuit LC d'après la forme canonique de l'équation différentielle :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{donc} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Remarque. Homogénéité. La quantité L/R est un temps, la quantité RC aussi donc :

$$\left[\frac{L}{R} \times RC \right] = T^2$$

Donc :

$$[LC] = T^2$$

L'expression $1/\sqrt{LC}$ est donc bien homogène à l'inverse d'un temps.

La solution de l'équation différentielle dans le cas du circuit LC est alors :

$$u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

La période propre et la fréquence propre sont :

$$\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}}$$

Conditions initiales. Traitons le cas où le condensateur est chargé sous une tension E et le régime permanent établi. La tension aux bornes d'un condensateur ne peut varier brusquement donc :

$$\boxed{u_C(0) = E}$$

Le régime permanent est établi, donc à cause du condensateur $i(t < 0) = 0$. Or i est aussi le courant qui traverse la bobine donc ne peut pas varier brusquement :

$$i(0) = 0$$

Donc, d'après la caractéristique courant-tension du condensateur :

$$\boxed{\frac{du_C}{dt}(0) = 0}$$

Résolution. D'une part $u_C(0) = E$ et d'autre part :

$$u_C(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = A$$

Donc $A = E$. Puis :

$$\frac{du_C}{dt}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\frac{du_C}{dt}(0) = B\omega_0$$

Donc $B = 0$. Ainsi :

$$u_C(t) = E \cos(\omega_0 t)$$

Courant. Pour calculer le courant, on peut utiliser :

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

Or :

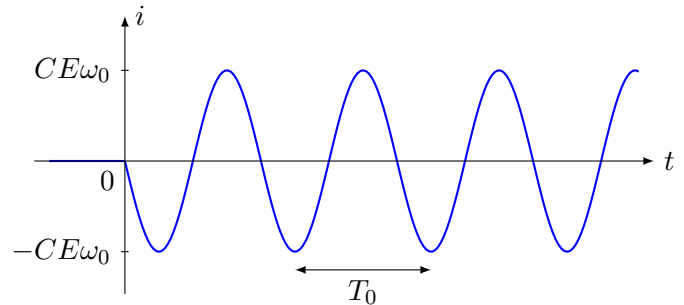
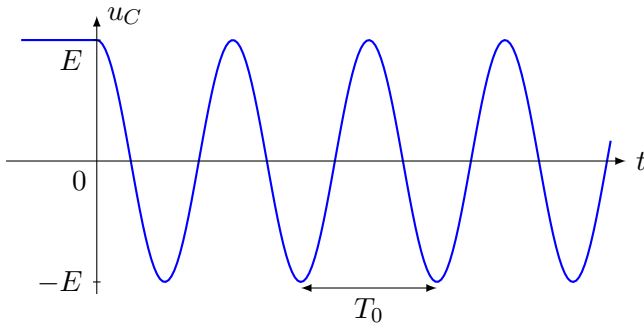
$$\frac{du_C}{dt}(t) = -E\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

Conclusion. La tension aux bornes du condensateur est :

$$u_C(t) = E \cos(\omega_0 t)$$

L'intensité dans le circuit est :

$$i(t) = -CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$



Remarque. La tension aux bornes du condensateur et le courant sont des fonctions continues. Ce n'est pas le cas de la tension aux bornes de la bobine ($u_L(0^-) = 0$ (régime permanent) tandis que $u_L(0^+) = -u_C(0^+) = -E$).

2.4 Aspect énergétique

On reprend la loi des mailles :

$$u_C + u_L = 0$$

On la multiplie par i :

$$u_C i + u_L i = 0$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u_C \times C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di}{dt} \times i &= 0 \\ C \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u_C^2 \right) + L \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i^2 \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

L'énergie emmagasinée dans le circuit est :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

Elle est conservée au cours du temps. Il y a un échange périodique d'énergie entre le condensateur et la bobine.

Vérification avec la solution obtenue. On peut le vérifier avec les formules obtenues précédemment :

$$\frac{1}{2}Cu_C^2 = \frac{1}{2}CE^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

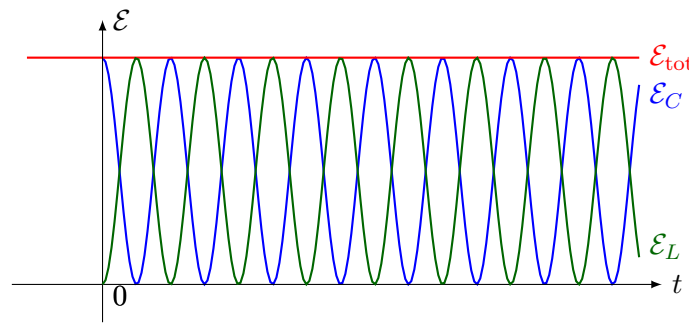
D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Li^2 &= \frac{1}{2}LC^2\omega_0^2 E^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2}LC^2 \frac{1}{LC} E^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2}CE^2 \sin^2(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}CE^2 \left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) \right) = \frac{1}{2}CE^2$$

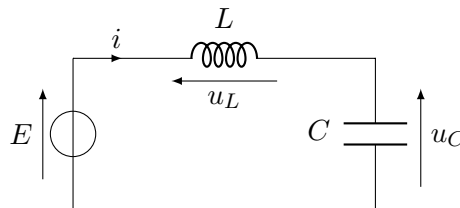
En moyenne, l'énergie stockée dans le condensateur et celle emmagasinée dans la bobine sont égales. Il y a échange périodique d'énergie entre les deux dipôles.



3 Circuit LC soumis à un échelon de tension

Nous avons aussi observé à l'oscilloscope la réponse d'un circuit LC à un échelon montant (de 0 à E). Modélisons ce circuit pour en déduire l'expression de $u_C(t)$. Le condensateur est initialement déchargé et le régime permanent établi.

3.1 Mise en équation



On écrit la loi des mailles :

$$u_C + u_L = E$$

Puis :

$$u_C + L \frac{di}{dt} = E$$

Enfin :

$$u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} = E$$

Ou encore :

$$\boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{E}{LC}}$$

3.2 Résolution

Conditions initiales. Le condensateur est supposé initialement déchargé soit :

$$u_C(t < 0) = 0$$

La tension aux bornes d'un condensateur ne pouvant varier brutalement, $u_C(t = 0^+) = u_C(t = 0^-)$ ainsi :

$$\boxed{u_C(t = 0^+) = 0}$$

Le régime permanent est établi donc le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert :

$$i(t < 0) = 0$$

L'intensité qui traverse une bobine ne pouvant varier brutalement, $i(t = 0^+) = i(t = 0^-)$ ainsi :

$$i(t = 0^+) = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{du_C}{dt}(0) = 0}$$

Résolution.

❶ On écrit l'équation homogène associée à l'équation différentielle obtenue.

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0$$

❷ On écrit la forme générale de la solution de l'équation homogène.

$$u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

❸ On recherche une solution particulière constante. Posons $u_C(t) = \lambda$:

$$0 + \omega_0^2 \lambda = \omega_0^2 E \quad \implies \quad \lambda = E$$

$u_C(t) = E$ est une solution particulière de l'équation différentielle.

❹ On écrit la solution générale.

$$u_C(t) = E + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

❺ On détermine les constantes à l'aide des conditions initiales. On a vu que :

$$u_C(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du_C}{dt}(0) = \frac{i(0)}{C} = 0$$

Or :

$$u_C(0) = E + A \times 1 + B \times 0 = E + A$$

Et :

$$\frac{du_C}{dt}(t) = 0 - \omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t)$$

Donc :

$$\frac{du_C}{dt}(0) = -\omega_0 A \times 0 + \omega_0 B \times 1 = B\omega_0$$

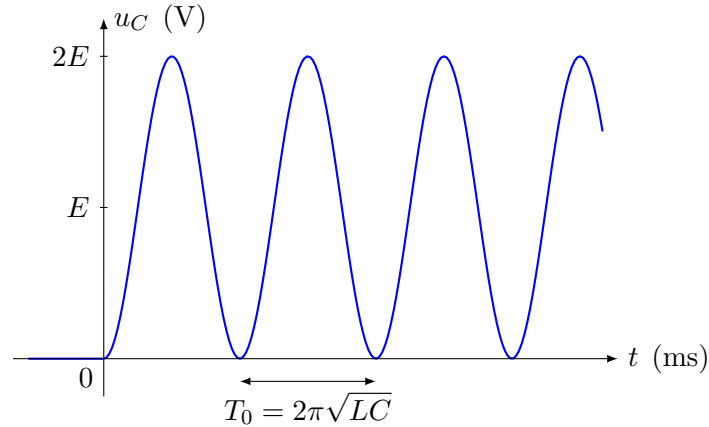
Ainsi :

$$A = -E \quad \text{et} \quad B = 0$$

Finalement :

$$u_C(t) = E - E \cos(\omega_0 t)$$

Graphique.



4 Intérêt pratique de l'oscillateur harmonique

Le principal intérêt de l'observation régulière d'une oscillation est la **mesure du temps**. Une excitation quelconque (comme un échelon) produit un phénomène se reproduisant à intervalle régulier et fait alors apparaître **un étalon temporel**. Ce principe est utilisé :

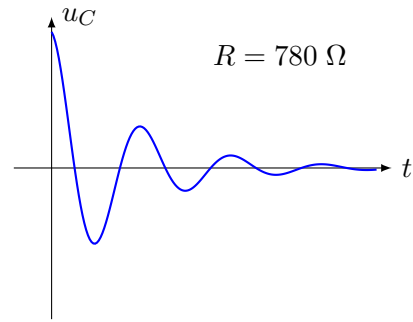
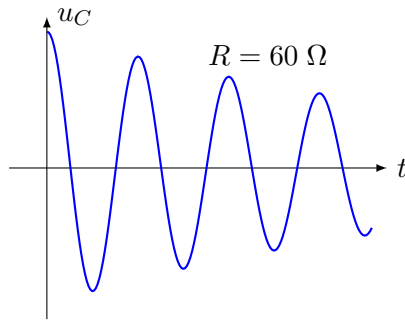
- dans les horloges mécaniques à balancier : on exploite le mouvement régulier du pendule ;
- dans les horloges à ressort : la période est liée au rapport de l'inertie et de la raideur du système ;
- dans les horloges électroniques : un cristal de quartz dont la fréquence d'oscillation est précisément connue (en général une puissance de 2 en Hz) ;
- dans les horloges atomiques : on utilise la régularité des oscillations des ondes électromagnétiques absorbées par un atome. L'actuelle définition de la seconde est basée sur le fonctionnement d'une horloge atomique.

5 L'oscillateur amorti

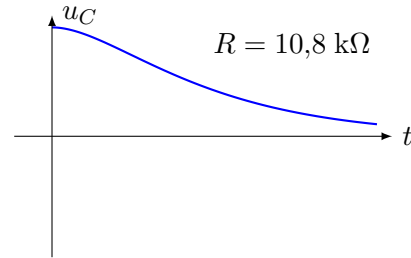
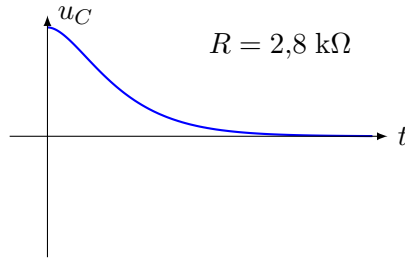
5.1 Introduction et observations expérimentales

En réalité, nous observons que les oscillations dans le circuit s'atténuent. Plus quantitativement :

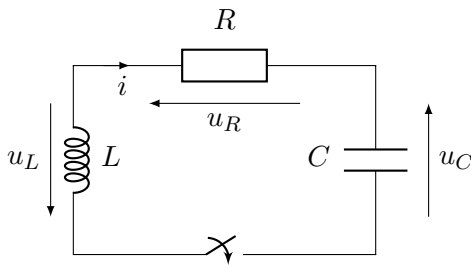
- Lorsque la résistance est petite : on observe plusieurs oscillations. Nous avons câblé un circuit avec $L = 43$ mH et $C = 20$ nF. On observe une série d'oscillations à la période $T = 186 \mu\text{s}$. On observe environ 25 oscillations lorsque $R \approx 60 \Omega$ (résistance interne du GBF + de la bobine), 9 oscillations lorsque $R \approx 180 \Omega$, 3 oscillations lorsque $R \approx 780 \Omega$.



- Lorsque la résistance est plus grande : les oscillations disparaissent. Lorsque $R \approx 2,8 \text{ k}\Omega$, on observe un régime transitoire dont la durée est d'environ $250 \mu\text{s}$ (à 95%). Lorsque $R \approx 10,8 \text{ k}\Omega$, on observe un régime transitoire plus long, d'environ $900 \mu\text{s}$.



5.2 Modélisation du circuit RLC



Loi des mailles : $u_C + u_R + u_L = 0$

Bobine : $u_L = L \frac{di}{dt}$

Condensateur : $i = C \frac{du_C}{dt}$

Loi d'Ohm : $u_R = Ri$

On établit là encore l'équation différentielle sur u_C .

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = 0$$

Donc :

$$RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

Équation différentielle du circuit RLC. Dans un circuit composé d'un condensateur idéal, d'une résistance et d'une bobine idéale, l'équation différentielle qui régit les variations de la tension u_C avec le temps est :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

Forme canonique de l'équation différentielle : En présence d'une équation différentielle du second ordre, on cherchera toujours à mettre l'équation sous la forme :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$$

ω_0 est appelée pulsation propre de l'oscillateur amorti (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) et Q le facteur de qualité (sans dimension). On identifiera ω_0 et Q pour en déduire le comportement de l'oscillateur.

Identifions ω_0 et Q dans l'équation :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

Donc :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Puis :

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \quad \text{donc} \quad Q = \sqrt{\frac{1}{LC}} \frac{L}{R} = \sqrt{\frac{1}{C}} \frac{\sqrt{L}}{R}$$

Dans le cas du circuit RLC série :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

5.3 Bilan énergétique

On écrit la loi des mailles $u_C + u_R + u_L = 0$. Donc :

$$u_C i + u_R i + u_L i = 0$$

Ainsi :

$$C \frac{du_C}{dt} u_C + R i^2 + L \frac{di}{dt} i = 0$$

Donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) + R i^2 = 0$$

On obtient :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\mathcal{P}_J}$$

L'énergie emmagasinée dans le circuit est progressivement dissipée par effet Joule.

5.4 Résolution de l'équation différentielle

5.4.1 Conditions initiales

Lorsque $t < 0$, le courant ne peut pas passer car l'interrupteur est ouvert donc :

$$i(t < 0) = 0$$

Le condensateur est initialement chargé sous une tension E donc :

$$u_C(t < 0) = E$$

Le courant qui traverse une bobine ne peut varier brutalement donc $i(t)$ est une fonction continue ainsi :

$$i(t = 0^+) = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{du_C}{dt}(t = 0^+) = 0}$$

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut varier brusquement donc :

$$\boxed{u_C(t = 0^+) = E}$$

5.4.2 Équation caractéristique

L'équation caractéristique correspondant à l'équation différentielle canonique est

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

On écrit alors le discriminant :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4 \times 1 \times \omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$$

On doit alors distinguer les solutions selon le signe du discriminant. Si $\Delta > 0$, alors :

$$\begin{aligned}\frac{\omega_0^2}{Q^2} &> 4\omega_0^2 \\ \frac{1}{Q^2} &> 4 \\ Q^2 &< \frac{1}{4} \\ Q &< \frac{1}{2}\end{aligned}$$

On distingue donc trois cas :

- $Q < 1/2$: le discriminant est positif et les racines réelles. Il y a une décroissance exponentielle des solutions. Ce régime est nommé **apériodique**.
- $Q = 1/2$: il y a une racine double. Ce régime est nommé **critique**.
- $Q > 1/2$: le discriminant est négatif et les racines complexes. Les solutions de l'équation sont oscillantes avec une amplitude décroissante. Ce régime est nommé **pseudo-périodique**.

5.4.3 Cas $\Delta < 0$: le régime pseudo-périodique

Forme générale des solutions : Les racines du polynôme caractéristiques sont :

$$\begin{aligned}r_{\pm} &= \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} \\ &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}}\end{aligned}$$

Que l'on réécrit comme :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega$$

La solution générale de l'équation est :

$$u_C(t) = \underbrace{\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)}_{\text{partie décroissante}} \underbrace{[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]}_{\text{partie oscillante}}$$

La partie oscillante oscille à la pulsation ω définie comme :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

La période des oscillations est donc :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Dès que Q est assez grand, la pseudo-période T est très proche de la période propre T_0 .

Conditions initiales : On détermine maintenant les constantes A et B à partir des conditions initiales. D'une part :

$$u_C(0) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} \times 0\right) [A \cos(\omega \times 0) + B \sin(\omega \times 0)] = A$$

Donc $A = E$. Puis :

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] + \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) [-A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)]$$

Donc :

$$\frac{du_C}{dt}(0) = -\frac{\omega_0}{2Q}A + \omega B$$

Or $\frac{du_C}{dt}(t=0^+) = 0$ donc

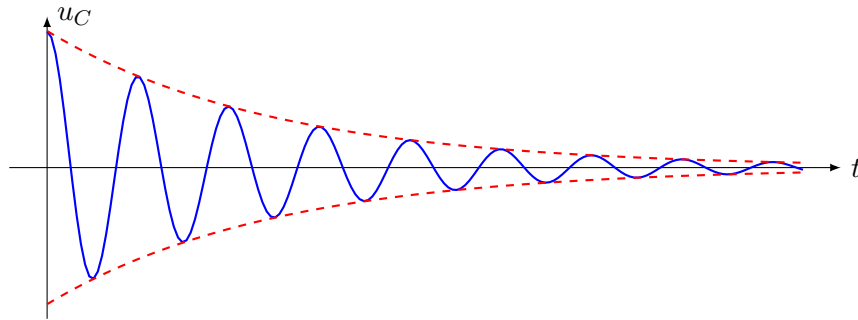
$$-\frac{\omega_0}{2Q}A + B\omega = 0$$

Finalement :

$$B = \frac{\omega_0}{2Q\omega}E = \frac{E}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

$$u_C(t) = E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \left[\cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin(\omega t) \right]$$

Allure de la courbe : L'oscillation se fait entre les courbes $+g(t)$ et $-g(t)$, où $g(t) = \frac{E}{\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$.



Durée du régime transitoire. L'amplitude d'oscillation est environ égale à :

$$E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$

Donc l'amplitude est plus petite que 5 % de sa valeur initiale veut dire que :

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) &< 0,05 \\ -\frac{\omega_0}{2Q}t &< \ln(0,05) \\ -\frac{\omega_0}{2Q}t &< -\ln(20) \\ \frac{\omega_0}{2Q}t &< \ln(20) \\ t &< 2 \ln(20) \frac{Q}{\omega_0} \end{aligned}$$

On fait apparaître la période propre des oscillations (environ égale à la pseudo-période si Q est assez grand) :

$$2 \ln(20) \frac{Q}{\omega_0} \approx Q \frac{2\pi}{\omega_0} = QT_0$$

Nombres d'oscillations observables. En régime pseudo-périodique, le facteur de qualité donne un ordre de grandeur du nombre d'oscillations observables. La période de ces oscillations est :

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

5.4.4 Cas $\Delta > 0$: le régime apériodique

Forme générale des solutions : les racines du polynôme caractéristiques sont :

$$r_{\pm} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega_0^2}$$

La solution générale de l'équation est :

$$u_C(t) = A \exp(r_+ t) + B \exp(r_- t)$$

Conditions initiales : on détermine maintenant les constantes A et B à partir des conditions initiales. D'une part :

$$u_C(0) = A \exp(r_+ \times 0) + B \exp(r_- \times 0) = A + B$$

Puis :

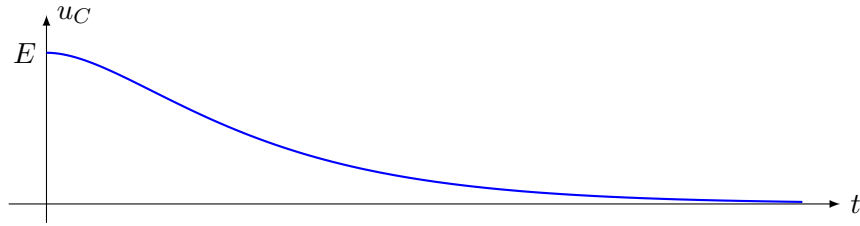
$$\frac{du_C}{dt}(0) = Ar_+ + Br_-$$

Or $\frac{du_C}{dt}(t=0^+) = 0$ donc $A = -\frac{Br_-}{r_+}$ ainsi :

$$B = \frac{Er_+}{r_+ - r_-} \quad \text{et} \quad A = -\frac{Er_-}{r_+ - r_-}$$

$$u_C(t) = \frac{E}{r_+ - r_-} (r_+ \exp(r_- t) - r_- \exp(r_+ t))$$

Allure de la courbe : le départ se fait à dérivée nulle (car $i(0^+) = 0$).



Durée du régime transitoire : les deux racines sont négatives : le premier terme décroît sur un temps typique $-1/r_+$ et le second sur $-1/r_-$. Comme $|r_-| > |r_+|$, $-\frac{1}{r_-} < -\frac{1}{r_+}$: c'est le terme $A \exp(r_+ t)$ qui décroît le plus lentement. On peut alors estimer la durée du régime transitoire à 95% à $-\ln(20)/r_+$. Or :

$$r_+ = -\frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega_0^2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right)$$

Si Q est assez petit, en utilisant l'approximation $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \varepsilon/2$:

$$r_+ \approx -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - 1 + \frac{4Q^2}{2}\right)$$

$$r_+ \approx -Q\omega_0$$

Un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire est donc $3/(Q\omega_0)$.

5.4.5 Cas $\Delta = 0$: le régime critique

Le régime tel que $Q = 1/2$ (défini mathématiquement) est appelé régime critique et sépare les régime apériodique et pseudo-périodique. Dans ce cas, il faut chercher une solution sous la forme :

$$u_C(t) = (At + B) \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$

$$u_C(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t)$$

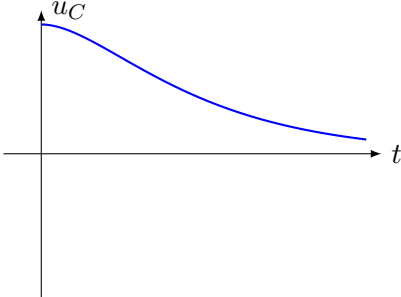
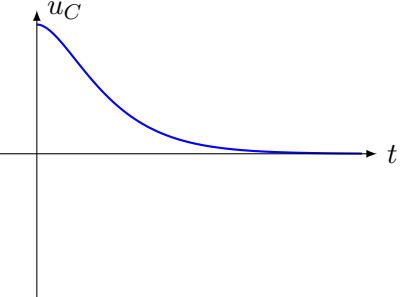
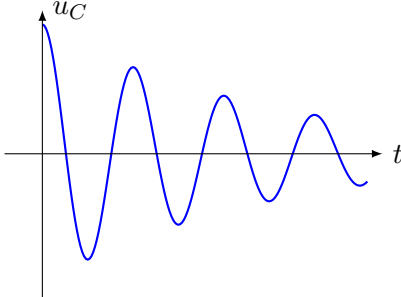
A et B dépendent des conditions initiales.

5.5 Bilan : à retenir

Forme canonique de l'équation différentielle : En présence d'une équation différentielle du second ordre, on cherchera toujours à mettre l'équation sous la forme :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$$

ω_0 est appelée pulsation propre de l'oscillateur amorti (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) et Q le facteur de qualité (sans dimension). Après la mise en équation du problème (mécanique, électronique, autre), on identifiera ω_0 et Q pour en déduire le comportement de l'oscillateur.

RÉGIME APÉRIODIQUE	RÉGIME CRITIQUE	RÉGIME PSEUDO-PÉRIODIQUE
$Q < \frac{1}{2}$	$Q = \frac{1}{2}$	$Q > \frac{1}{2}$
		
$u_C(t) = A \exp(r_+ t) + B \exp(r_- t)$ $r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$	$u_C(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t)$	$u_C(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times$ $(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$ $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0$
$\frac{3}{Q\omega_0}$ ($Q \ll 0,5$)	Durée typique du régime transitoire	$\frac{2\pi Q}{\omega_0} = QT_0$ ($Q \gg 0,5$)

Par exemple, dans le cas du circuit RLC série, on observe un régime pseudo-périodique si $Q < 1/2$ donc :

$$\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} > \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad 2\sqrt{\frac{L}{C}} > R$$

Avec les valeurs de l'expérience, cela correspond à $R < 3,0 \text{ k}\Omega$.